
CONTRÔLE CONTINU 1

NOM Prénom :

Numéro d'étudiant : Groupe :

Barème : Ex1-7 points, Ex2-7 points, Ex3-6 points.

Exercice 1. Soit \mathcal{A} l'ensemble des nombres de 5 chiffres (c'est-à-dire de longueur 5 avec des chiffres choisis dans $\{0, 1, \dots, 9\}$ et de premier chiffre différent de zéro).

a) Déterminer le cardinal de \mathcal{A} .

.....

b) Déterminer combien d'éléments de \mathcal{A} sont divisibles par 5. (Un nombre est divisible par 5 si et seulement si son dernier chiffre est égal à 0 ou 5.)

.....

c) Déterminer combien d'éléments de \mathcal{A} ont tous des chiffres différents.

.....

d) Donner le nombre d'éléments de \mathcal{A} contenant au moins un chiffre égal à 4.

.....

.....

e) Déterminer combien d'éléments de \mathcal{A} sont divisibles par 5 ou contiennent au moins un chiffre égal à 4 ?

.....

.....

.....

.....

Exercice 2. Soit \mathcal{E} un sous-ensemble fini de \mathbb{Z} et soit $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathbb{Z}$ l'application qui associe à tout élément $\varepsilon \in \mathcal{E}$ son carré ε^2 .

a) Montrer que $\#f(\mathcal{E}) \leq \#\mathcal{E}$.

.....

b) À quelle condition sur \mathcal{E} a-t-on l'égalité : $\#f(\mathcal{E}) = \#\mathcal{E}$?

.....

.....

.....

c) Montrer que si $\#f(\mathcal{E}) < \#\mathcal{E}$ il existe $\varepsilon, \varepsilon' \in \mathcal{E}$ tels que $\varepsilon + \varepsilon' = 0$.

.....

.....

.....

.....

d) Montrer que $\#f(\mathcal{E}) = \frac{\#\mathcal{E}}{2}$ implique que 0 n'est pas dans \mathcal{E} .

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

Exercice 3. *Un couple veut visiter un appartement pour le louer. Le gardien est chargé de leur faire la visite et il possède 6 clés marquées A, B, C, D, E, F , dont seulement la clé B ouvre la porte de l'appartement. Or, le gardien a oublié que la clé B est la clé qui ouvre la porte et donc il est obligé de les essayer successivement au hasard. Appelons "test" une séquence ordonnée de clés distinctes qui se termine avec la clé B . Par exemple, ACB et $DAFB$ sont des tests, mais ACE ne l'est pas.*

- a) *Supposons que la clé B soit la troisième testée. Déterminer le nombre de tests qui correspondent à ce scénario.*

.....

.....

.....

- b) *Supposons que la clé B soit la sixième testée. Déterminer le nombre de tests qui correspondent à ce scénario.*

.....

.....

.....

- c) *Supposons que l'on ne sache pas à quelle tentative le gardien a trouvé la clé B . Déterminer le nombre de tests qui correspondent à ce scénario.*

.....

.....

.....

.....

.....

Tournez la feuille.

Pour être mieux organisé dans l'avenir, le gardien décide de partager les 6 clés dans une boîte en bois et une boîte en métal.

- d) *Déterminer le nombre de manières de distribuer les 6 clés dans les deux boîtes.*

.....
.....
.....

- e) *Si le gardien veut que chaque boîte contienne au moins une clé de combien de façons peut-il distribuer les clés ?*

.....
.....
.....
.....

Bon courage!