Exercices Coefficients Binomiaux et Permutations

Exercice 1 :
Montrer que pour tout $n \in N$ et tout $p \in Z$ on a

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire que

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Solution :

$$\boldsymbol{p\binom{n}{p} = p\frac{n!}{p!\,(n-p)!} = n\frac{(n-1)!}{(p-1)!\big(n-1-(p-1)\big)!} = n\binom{n-1}{p-1}}$$

de manière que

$$\boldsymbol{\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = \sum_{p=0}^{n} n\binom{n-1}{p-1} = n\sum_{q=0}^{n-1}\binom{n-1}{q} = n \cdot 2^{n-1}.}$$

Exercice 2 :
Soient $n, p, q \in N$ tels que $n \leq p+q$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Solution :

$$\boldsymbol{\left(\sum_{k'=0}^{p}\binom{p}{k'}x^{k'}\right)\left(\sum_{k''=0}^{q}\binom{q}{k''}x^{k''}\right) = (1+x)^p(1+x)^q = (1+x)^{p+q} = \sum_{n'=0}^{p+q}\binom{p+q}{n'}x^{n'}}$$

de manière que, en regardant le coefficient de x^n, on obtient

$$\boldsymbol{\sum_{k=0}^{n}\binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.}$$

Exercice 3 :
Montrer que pour tout $n \in N$, $n \neq 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}.$$

S**olution : par récurrence sur n :**
Pour n=1 l'égalité est triviale.
Supposons l'égalité vraie pour n-1 et montrons-la pour n.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} + \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1}$$

par la formule de Pascal.

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k} = \sum_{k=1}^{n-1} \frac{1}{k}$$

par hypothèse de récurrence, et

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n-1}{k-1} = \sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1}\frac{1}{n}\binom{n}{k} = -\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k}\binom{n}{k} = \frac{1}{n}$$

car

$$\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k}\binom{n}{k} = -1.$$

Cela nous donne l'égalité à montrer.

<u>Exercice 4</u> :

Quel est le nombre de mots différents peuvent être obtenus en permutant les lettres de MATHEMATIQUES (utiliser les nombres multinomiaux) ?

Solution : on a 13 lettres en total et on veut que 2 soient dans la « boîte M », 2 soient dans la « boîte A » , etc. de manière que on a

$$\binom{13}{2,2,2,1,2,1,1,1,1} = \frac{13!}{2!\,2!\,2!\,2!} = 389188800$$

mots différents.

<u>Exercice 5</u> :

Combien de possibilités a-t-on de placer *n* boules indistinguables dans *k* boîtes distinguables ?

Solution : pour compter les possibilités c'est plus facile de penser à n+k-1 cases où on doit placer les n boules (O,O,O,…,O) et k-1 séparations (|,|,|,…,|), qui nous donnent la division des boules dans les k boîtes. Par exemples, si n=4 et k=3, une division possible est la suivante :

O,|,O,O,|,O

où on place 1 boule dans la première boîte, 2 boules dans la deuxième et 1 boule dans la troisième. Une autre division possible est

O|,|,O,O,O

où on place 1 boule dans la première boîte, 0 boules dans la deuxième et 3 boule dans la troisième. Etc.

Donc en total on a $\binom{n+k-1}{k-1} = \binom{n+k-1}{n}$ **possibilités.**

Exercice 6 :

Montrer qu'il y a $\binom{n+k-1}{n}$ vecteurs distincts à composantes entières et non-négatives $[x_1,x_2,\ldots,x_k]$ tels que $x_1+x_2+\ldots+x_k=n$.

Solution : c'est exactement comme dans l'Exercice 5, mais à la place des boules on met des 1 et après on considère la somme. Par exemple, pour n=7 et k=5, un exemple est

1,|,|,1,|,1,1,|,1,1,1

qui nous donne le vecteur [1,0,1,2,3]. Un autre exemple est

1,|,1,|,|,1,1,1,|,1,1

qui nous donne le vecteur [1,1,0,3,2]. Etc.

Exercice 7 :

Une secrétaire a 12 enveloppes portant chacune l'adresse d'un client différent et elle a aussi 12 lettres différentes à envoyer à chacun des 12 clients. Elle ne sait pas pour chaque client quelle lettre doit être destinée, donc elle met au hasard chacune des 12 lettres dans chacune des 12 enveloppes et les poste. Combien des combinaisons lettre-enveloppe y-a-il ? Combien de possibilités y-a-t-il que personne ne reçoit sa lettre ?

Solution : il y a 12 ! = 479001600 combinaisons lettre-enveloppe, parce que pour la première enveloppe on a 12 possibilités, pour la deuxième on a 11 possibilités, etc.
Notons qu'on a ici des bijections entre les lettres et les enveloppes. On peut identifier tout personne avec un nombre entre 1 et 12, et sa lettre avec le même nombre. En cette manière, on a des permutations sur X={1,…,12}. Si personne ne reçoit sa lettre, ça veut dire que la permutation en objet est sans points fixes, i.e. elle est un dérangement. Mais alors le nombre de possibilités que personne ne reçoit sa lettre est égal au nombre des dérangements de degré 12, qui est donc, par la formule du crible, D_{12} = 176214841.

Exercice 8 :

Dans une bibliothèque il y a 4 livres, qu'on appelle A, B, C et D. Plusieurs personnes prennent ces livres et ils les remettent dans la bibliothèque dans un ordre différent. On peut associer à chaque personne une permutation des 4 livres qui corresponde à l'ordre dont elle a mis les livres. Si on suppose qu'à chaque personne est associé une permutation différente, quel est le nombre maximal de personnes ? Supposons maintenant qu'il y a 24 personnes et qu'à chaque personne est associé une permutation différente. Combien de personnes ont laissé le livre A dans la position d'origine ? Combien de personnes ont changé la position des tous les livres ?

Solution : le nombre maximal de personnes est égal au nombre maximal de permutations différentes de 4 objets, i.e. # S_4 = 24. Le nombre de personnes qui ont laissé et livre A dans la position d'origine est égal au nombre des permutations de 4 objets avec un point fixe, i.e. au nombre des permutations de 3 objets, i.e. 3 ! = 6. Finalement, le nombre des personnes qui ont changé la position des tous les livres est égal au nombre des dérangements de degré 4, qui est D_4 = 9 , par la formule du crible.

Exercice 9 :
Soient A et B deux ensembles de cardinalité 6 et 4 respectivement. Combien d'applications de A vers B qui ne sont pas surjectives ni injectives y-a-t-il ?

Solution : le nombre total d'applications est 4^6. Il n'y a pas d'applications injectives (ni bijectives) mais il y a

$$\sum_{k=0}^{4} (-1)^{4-k} \binom{4}{k} k^6 = 4^6 - 2536$$

applications surjectives (formule donnée en cours). Donc il y a 2536 applications qui ne sont pas surjectives (ni injectives).

Exercice 10 :
On considère le cas d'une station de vacances où un groupe de 20 touristes doit être logé dans un hôtel qui a 10 chambres. L'hôtelier loge les touristes de manière que chaque chambre est occupée. En supposant que chaque chambre peut accueillir n'importe quel nombre de personnes, combien y-a-t-il de choix pour l'hôtelier pour repartir les touristes dans les chambres ? Même question, en supposant qu'il y a seulement de chambres doubles.

Solution : Il peut repartir les touristes dans 10^{20} manières. Si le chambres sont seulement doubles il a

$$\binom{20}{2,2,2,2,2,2,2,2,2,2} = \frac{20!}{2^{10}} = 2375880867360000$$

possibilités.