

## Exercices Coefficients Binomiaux et Permutations

### Exercice 1 :

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tout  $p \in \mathbb{Z}$  on a

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire que

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}.$$

### Exercice 2 :

Soient  $n, p, q \in \mathbb{N}$  tels que  $n \leq p + q$ . Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

### Exercice 3 :

Montrer que pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $n \neq 0$ , on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

### Exercice 4 :

Quel est le nombre de mots différents peuvent être obtenus en permutant les lettres de MATHEMATIQUES (utiliser les nombres multinomiaux) ?

### Exercice 5 :

Combien de possibilités a-t-on de placer  $n$  boules indistinguables dans  $k$  boîtes distinguables ?

### Exercice 6 :

Montrer qu'il y a  $\binom{n+k-1}{n}$  vecteurs distincts à composantes entières et non-négatives  $[x_1, x_2, \dots, x_n]$  tels que  $x_1 + x_2 + \dots + x_n = n$ .

### Exercice 7 :

Une secrétaire a 12 enveloppes portant chacune l'adresse d'un client différent et elle a aussi 12 lettres différentes à envoyer à chacun des 12 clients. Elle ne sait pas pour chaque client quelle lettre doit être destinée, donc elle met au hasard chacune des 12 lettres dans chacune des 12 enveloppes et les poste. Combien des combinaisons lettre-enveloppe y-a-il ? Combien de possibilités y-a-t-il que personne ne reçoit sa lettre ?

Exercice 8 :

Dans une bibliothèque il y a 4 livres, qu'on appelle A, B, C et D. Plusieurs personnes prennent ces livres et ils les remettent dans la bibliothèque dans un ordre différent. On peut associer à chaque personne une permutation des 4 livres qui correspond à l'ordre dont elle a mis les livres. Si on suppose qu'à chaque personne est associée une permutation différente, quel est le nombre maximal de personnes ? Supposons maintenant qu'il y a 24 personnes et qu'à chaque personne est associée une permutation différente. Combien de personnes ont laissé le livre A dans la position d'origine ? Combien de personnes ont changé la position des tous les livres ?

Exercice 9 :

Soient A et B deux ensembles de cardinalité 6 et 4 respectivement. Combien d'applications de A vers B qui ne sont pas surjectives ni injectives y-a-t-il ?

Exercice 10 :

On considère le cas d'une station de vacances où un groupe de 20 touristes doit être logé dans un hôtel qui a 10 chambres. L'hôtelier loge les touristes de manière que chaque chambre est occupée. En supposant que chaque chambre peut accueillir n'importe quel nombre de personnes, combien y-a-t-il de choix pour l'hôtelier pour répartir les touristes dans les chambres ? Même question, en supposant qu'il y a seulement de chambres doubles.