

Exercices Coefficients Binomiaux et Permutations

Exercice 1 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$ on a

$$p \binom{n}{p} = n \binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire que

$$\sum_{p=0}^n p \binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Exercice 2 :

Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p + q$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^n \binom{p}{k} \binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 3 :

Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, on a

$$\sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} \binom{n}{k} = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}.$$

Exercice 4 :

Quel est le nombre de mots différents peuvent être obtenus en permutant les lettres de MATHEMATIQUES (utiliser les nombres multinomiaux) ?

Exercice 5 :

Combien de possibilités a-t-on de placer n boules indistinguables dans k boîtes distinguables ?

Exercice 6 :

Montrer qu'il y a $\binom{n+k-1}{n}$ vecteurs distincts à composantes entières et non-négatives $[x_1, x_2, \dots, x_k]$ tels que $x_1 + x_2 + \dots + x_k = n$.

Exercice 7 :

Dans une bibliothèque il y a 4 livres, qu'on appelle A, B, C et D. Plusieurs personnes prennent ces livres et ils les remettent dans la bibliothèque dans un ordre différent. On peut associer à chaque personne une permutation des 4 livres qui corresponde à l'ordre dont elle a mis les livres. Si on suppose qu'à chaque personne est associé une permutation différente, quel est le nombre maximal de personnes ? Supposons maintenant qu'il y a 24 personnes et qu'à chaque personne est associé une permutation différente. Combien de personnes ont laissé le livre A dans la position d'origine ? Combien de personnes ont changé la position des tous les livres ?

Exercice 8 :

Soient A et B deux ensembles de cardinalité 6 et 4 respectivement. Combien d'applications de A vers B qui ne sont pas surjectives ni injectives y-a-t-il ?

Exercice 9 :

On considère le cas d'une station de vacances où un groupe de 20 touristes doit être logé dans un hôtel qui a 10 chambres. L'hôtelier loge les touristes de manière que chaque chambre est occupée. En supposant que chaque chambre peut accueillir n'importe quel nombre de personnes, combien y-a-t-il de choix pour l'hôtelier pour répartir les touristes dans les chambres ? Même question, en supposant qu'il y a seulement de chambres doubles.