Université Paris 8
A.A. 2021–2022

Théorie des graphes et Combinatoire

Martino Borello et Safia Boukheche

5 janvier 2022

Table des matières

Chapitre 1

Dénombrement

1.1 Rappels sur les ensembles

Définition 1.1. Un **ensemble** est une collection d'objets, dits **éléments**.

Exemple 1.1. On peut présenter un ensemble dans plusieurs manières :
- $\{0, 1\}$;
- $\{$rouge, noir, blanc$\}$;
- $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, \dots\}$;
- $\varnothing$;
- $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pair}\} = \{0, 2, 4, 6, \dots\}$;
- $\mathcal{P} = \{\text{nombres premiers}\} = \{2, 3, 5, 7, \dots\}$;

Définition 1.2. Soit A un ensemble. On dit que $a \in A$ si a est un élément de A, $a \notin A$ autrement.

Exemple 1.2. $2754 \in \mathcal{E}$ et $23721 \notin \mathcal{E}$. Est-ce que $30013 \in \mathcal{P}$?

Définition 1.3. Soit A un ensemble. On indique avec $\#A$ ou $|A|$ la cardinalité de A, i.e. le nombre d'éléments de A.

Exemple 1.3. $\#\varnothing = 0$. Combien ça vaut $\#\mathcal{P}$?

Définition 1.4. Soit A et B deux ensembles. On dit que $A \subseteq B$, i.e. A est un **sous-ensemble** de B, si tout élément de A est un élément de B. On dit que $A = B$ si $A \subseteq B$ et $B \subseteq A$.

Exemple 1.4. $\mathcal{P} \subseteq \mathbb{N}$.

Définition 1.5. Soit A un ensemble. On note $P(A)$ l'**ensemble des parties** de A, i.e. l'ensemble de tous les sous-ensembles de A.

Exemple 1.5. Si $A = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$, alors

$$P(A) = \{\varnothing, \{\clubsuit\}, \{\diamondsuit\}, \{\spadesuit\}, \{\clubsuit, \diamondsuit\}, \{\clubsuit, \spadesuit\}, \{\diamondsuit, \spadesuit\}, A\}.$$

Définition 1.6. Soit A et B deux ensembles. La **réunion** (ou l'**union**) $A \cup B$ de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A ou à B. L'**intersection** $A \cap B$ de A et B est l'ensemble des éléments qui appartiennent à A et à B.

Exemple 1.6. Si $A = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit\}$ et $B = \{\diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$, alors $A \cap B = \{\clubsuit, \diamondsuit, \spadesuit, \heartsuit\}$ et $A \cap B = \{\diamondsuit, \spadesuit\}$.

Définition 1.7. Soit A et B deux ensembles. Si $A \subseteq B$, on note $\complement_B A$, ou $B \setminus A$, ou $\overline{A}$, ou encore A^C, le **complémentaire de** A **dans** B, i.e. l'ensemble des éléments de B qui n'appartiennent pas à A.

Exemple 1.7. Si $\mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ pair}\}$, alors $\complement_{\mathbb{N}} \mathcal{E} = \{x \in \mathbb{N} \mid x \text{ impair}\}$.

Définition 1.8. Soit A et B deux ensembles. Le **produit cartésien** $A \times B$ des ensembles A et B est l'ensemble des couples ordonnées (a, b), avec $a \in A$ et $b \in B$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on définit $A^n = \underbrace{A \times A \times \cdots \times A}_{n \text{ fois}}$.

Exemple 1.8. $\{A, B, C\} \times \{a, b, c\} = \{Aa, Ab, Ac, Ba, Bb, Bc, Ca, Cb, Cc\}$.

1.1.1 Premiers principes de dénombrement d'ensembles

Tout ensemble considéré dorénavant sera fini.

Principe d'addition. Si $A_1, \ldots, A_t$ sont t ensembles à deux à deux disjoints, i.e. tels que $A_i \cap A_j = \varnothing$ pour tout $i \neq j$, alors

$$\#(A_1 \cup \ldots \cup A_t) = \#A_1 + \cdots + \#A_t.$$

Principe de multiplication. Si $A_1, \ldots, A_t$ sont t ensembles, alors

$$\#(A_1 \times \ldots \times A_t) = \#A_1 \cdot \cdots \cdot \#A_t.$$

Lemme 1.1. Si $A \subseteq B$, alors $\#\complement_B(A) = \#B - \#A$.

Lemme 1.2. Soit A, B deux ensembles. On a

$$\#(A \cup B) = \#A + \#B - \#(A \cap B).$$

Principe d'inclusion-exclusion, dit aussi Formule de Poincaré.

Théorème 1.1 (formule de Poincaré)**.** Soit $A_1, \dots, A_t$ des ensembles. On a

$$\#\left(\bigcup_{i=1}^{t} A_i\right) = \sum_{k=1}^{t}\left((-1)^{k-1} \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \#(A_{i_1} \cap \ldots \cap A_{i_k})\right).$$

Théorème 1.2. Soit A un ensemble de cardinalité n. Alors $P(A) = 2^n$.

1.1.2 Première série d'exercices

Exercice 1.1. Pour composer un costume, un homme peut choisir entre 3 chemises (grise, noire, blanche) et deux cravates (rouge ou bleue). Par exemple il peut mettre une chemise blanche avec une cravate rouge ou bien une chemise noire avec une cravate bleue. De combien de manières différentes il peut s'habiller ?

Exercice 1.2. Dans une bibliothèque on trouve 4 livres de Balzac, 3 livres de Hugo et 3 livres de Zola. On souhaite prendre deux livres de deux auteurs différents. De combien de manières différentes peut-on le faire ?

Exercice 1.3. Quand on dit « il y a un », on sous-entend « il y a au moins un ». Sur un échantillon de 100 foyers français,

- dans 95 foyers, il y a une plante,
- dans 85 foyers, il y a un téléviseur,
- dans 75 foyers, il y a un ordinateur.

Quel est au minimum le nombre de foyers de l'échantillon où il y a un téléviseur et un ordinateur ? Quel est au minimum le nombre de foyers de l'échantillon où il y a un téléviseur, un ordinateur et une plante ?

Exercice 1.4. Dans une école il y a 500 filles et 300 garçons. Ces élèves étudient une ou plusieurs langues. On sait que les cours d'anglais sont suivis par 416 élèves, les cours d'allemand sont suivis par 212 élèves, parmi les garçons 103 font de l'anglais et 78 font de l'allemand, 98 élèves font à la fois de l'anglais et de l'allemand et parmi eux 30 sont des garçons. Combien de filles étudient au moins une des deux langues, anglais ou allemand ?

Exercice 1.5. Combien peut-on former de numéros de téléphone à 10 chiffres ? Combien peut-on former de numéros de téléphone à 10 chiffres ne comportant pas le chiffre 0 ?

Exercice 1.6. En informatique, on utilise le système binaire pour coder les caractères. Un bit est un élément qui prend la valeur 0 ou la valeur 1. Avec 8 chiffres binaires, combien de caractères peut-on coder ?

Exercice 1.7. Pour n entier naturel, soit $p(n)$ le nombre de parties d'un ensemble à n éléments. Le nombre de parties du produit cartésian $A \times B$ d'un ensemble A à 5 éléments avec un ensemble B à 6 éléments est-il le produit $p(5)p(6)$?

Exercice 1.8. Combien y a-t-il de nombres compris entre 1 et 1000 divisibles par 2, par 3 ou par 5 ?

1.2 Applications d'ensembles finis

Soit A et B deux ensembles. On sait qu'une application f de A dans B, i.e. $f : A \to B$, est une relation qu'associe à tout élément $a \in A$ un unique élément $b \in B$, noté $f(a)$.

Notation. On décrit une application de $A = \{a_1, \dots, a_n\}$ dans $B = \{b_1, \dots, b_m\}$ en précisant l'image de tout élément de A, et cela on peut le faire de plusieurs manières :

- $f(a_1) = b_{i_1}, \dots, f(a_n) = b_{i_n}$;
- $f : a_1 \mapsto b_{i_1}, \dots, a_n \mapsto b_{i_n}$;
- $f = \begin{pmatrix} a_1 & \dots & a_n \\ b_{i_1} & \dots & b_{i_n} \end{pmatrix}$.

Remarque 1.1. On peut interpréter une fonction de A dans B de la façon suivante :

1. On regarde A comme un ensemble d'objets à ranger et B comme un ensemble de cases où l'on range. Ainsi une application de A dans B est une **façon de ranger** les objets dans les cases.

2. On regarde A comme un ensemble de places numérotées et B comme un ensemble de symboles pour remplir les cases numérotées. Ainsi une application de A dans B est un **n-uple de symboles** (certains symboles pouvant se répéter plusieurs fois), ou mot de longueur n en l'alphabet B.

Définition 1.9. On dit qu'une application $f : A \to B$ est **surjective** si pour tout élément $b \in B$, il existe au moins un $a \in A$ tel que $f(a) = b$.

Remarque 1.2. Dans les interprétations de la Remarque 1.1, une application surjective est donc :

1. Un rangement avec au moins un objet dans chaque case.
2. Un mot où on l'utilise tous les lettres de l'alphabet B.

Définition 1.10. On dit qu'une application $f : A \to B$ est **injective** si pour tout élément $a, a' \in A$, $a \neq a'$, on a $f(a) \neq f(a')$.

Remarque 1.3. Dans les interprétations de la Remarque 1.1, une application injective est donc :

1. Un rangement avec pas plus d'un objet dans chaque case (un tel rangement est parfois appelé **arrangement**).
2. Un mot où on l'utilise de symboles tous différents.

Définition 1.11. On dit qu'une application $f : A \to B$ est **bijective** si elle est à la fois injective et surjective.

Remarque 1.4. Dans les interprétations de la Remarque 1.1, une application bijective est donc :

1. Un rangement avec exactement un objet dans chaque case.
2. Un mot où on l'utilise tous les symboles exactement une fois.

Lemme 1.3. Le lien entre ces propriétés et la cardinalité des ensembles A et B est le suivant :

- $f : A \to B$ surjective implique que $\#A \geq \#B$.
- $f : A \to B$ injective implique que $\#A \leq \#B$.
- $f : A \to B$ bijective implique que $\#A = \#B$.

1.2.1 Dénombrement d'applications

Théorème 1.3. Soit A un ensemble à n éléments et B un ensemble à m éléments. Le nombre d'applications possibles de A dans B est

$$\#\{f : A \to B\} = m^n.$$

Définition 1.12. Pour $x \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ on définit

$$[x]_n := \underbrace{x \cdot (x-1) \cdot (x-2) \cdot \dots \cdot (x-n+1)}_{n \text{ facteurs}}.$$

Théorème 1.4. Soit A un ensemble à n éléments et B un ensemble à m éléments. Le nombre d'applications injectives possibles de A dans B est

$$\#\{f : A \to B \mid f \text{ injective}\} = [m]_n.$$

Définition 1.13. Pour $m \in \mathbb{N}$, il est usage d'appeler

$$m! := [m]_m = \underbrace{m \cdot (m-1) \cdot (m-2) \cdot \dots \cdot 1}_{m \text{ facteurs}}$$

le **factoriel** de m, et de poser $0! = 1$.

Notons que $[m]_n = \frac{m!}{(m-n)!}$.

Théorème 1.5. Soit A un ensemble à m éléments et B un ensemble à m éléments. Le nombre d'applications bijectives possibles de A dans B est

$$\#\{f : A \to B \mid f \text{ bijective}\} = m!.$$

1.2.2 Deuxième série d'exercices

Exercice 1.9. Raymond Queneau a écrit un ouvrage intitulé Cent mille milliards de poèmes. Il est composé de 10 pages contenant chacune 14 vers. Le lecteur peut composer son propre poème de 14 vers en prenant le premier vers de l'une des 10 pages puis le deuxième vers de l'une des 10 pages et ainsi de suite jusqu'au quatorzième vers. Justifier le titre de l'ouvrage.

Exercice 1.10. De combien de manière peut-on composer un podium avec les 8 athlètes finalistes de la finale olympique du 100 mètres ?

Exercice 1.11 (Principe des tiroirs). Montrer que, si l'on range k paires de chaussettes dans n tiroirs, avec $k > n$, alors il existe (au moins) un tiroir contenant (au moins) deux paires de chaussettes.

Exercice 1.12. Montrer que dans un amphi de 400 étudiants, il y a au moins deux étudiants nés le même jour.

Exercice 1.13. Combien y a-t-il de possibilités d'aligner 12 élèves ? À raison de 10 secondes par permutations, combien de temps faudrait-il pour épuiser toutes les possibilités ?

Exercice 1.14. À l'occasion du championnat mondial de football, un père a donné un album d'images autocollantes à collectionner à chacun de ces 3 enfants. Ensuite, il a acheté 30 images autocollantes différentes et il veut les leur distribuer. De combien de façons peut-il le faire ? Si le père veut que chacun de ces enfants ait au moins une image autocollante, de combien de façon peut-il distribuer les images autocollantes ?
(complément : combien d'applications surjectives y a-t-il d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal 3 ?)

Exercice 1.15. Combien de mots à 5 lettre peut-on écrire en n'utilisant que les lettres A,T,E,S ? Combien de ces mots commencent avec une voyelle ? Combien de ces mots ne contiennent pas de voyelle ?

Exercice 1.16. Dénombrer les anagrammes du mot PATRICE.
Dans chacun des cas suivants, dénombrer les anagrammes du mot PATRICE :

1. commençant et finissant par une consonne ;
2. commençant et finissant par une voyelle ;
3. commençant par une consonne et finissant par une voyelle ;
4. commençant par une voyelle et finissant par une consonne.

Exercice 1.17. Montrer que si l'on choisit $n + 1$ entiers distincts compris entre 1 et $2n$, alors au moins deux sont consécutifs.

1.3 Combinaisons

Soit B un ensemble à m éléments et $n \le m$ un entier non négatif.

Définition 1.14. Une partie A de B de cardinalité n est appelée n-**combinaison**. On appelle $\binom{m}{n}$ (**coefficient** ou **nombre binomial**) le nombre de n-combinaisons dans B.

Théorème 1.6. Le nombre binomial satisfait l'égalité suivante :

$$\binom{m}{n} = \frac{[m]_n}{n!} = \frac{m!}{(m-n)! \cdot n!}.$$

Remarque 1.5. Si $n > m$, on pose $\binom{m}{n} = 0$, car il n'y a pas de parties à n éléments.

Théorème 1.7 (Formule de Pascal)**.** Pour $m \ge n > 0$ on a

$$\binom{m}{n} = \binom{m-1}{n} + \binom{m-1}{n-1}.$$

La formule de Pascal permet de construire le **triangle de Pascal** :

$$\begin{array}{c|cccccccc}
m & & & & & & & & \\
\hline
0 & 1 & & & & & & & \\
1 & 1 & 1 & & & & & & \\
2 & 1 & 2 & 1 & & & & & \\
3 & 1 & 3 & 3 & 1 & & & & \\
4 & 1 & 4 & 6 & 4 & 1 & & & \\
5 & 1 & 5 & 10 & 10 & 5 & 1 & & \\
6 & 1 & 6 & 15 & 20 & 15 & 6 & 1 & \\
\vdots & \vdots & & & & & & & \ddots \\
\hline
 & 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \cdots \\
 & & & & n & & & &
\end{array}$$

Lemme 1.4. Pour $m \ge 0$ on a

$$\sum_{n=0}^{m} \binom{m}{n} = 2^m.$$

Théorème 1.8 (Formule itérée de Pascal)**.** Pour $m \ge n > 0$ on a

$$\sum_{k=n}^{m} \binom{k}{n} = \binom{m+1}{n+1}.$$

1.3.1 Troisième série d'exercices

Exercice 1.18. Un tournoi sportif compte 8 équipes engagées. Chaque équipe doit rencontrer toutes les autres une seule fois. Combien doit-on organiser de matchs ?

Exercice 1.19. Dans un lot de 20 pièces, 4 sont mauvaises. De combien de façons différentes peut-on prélever 4 pièces dans les cas suivants :

1. Les 4 pièces sont bonnes ?
2. Exactement une d'entre elles est mauvaise ?
3. Au moins une d'entre elles est mauvaise ?
4. Au moins deux sont mauvaises ?

Exercice 1.20. On tire successivement 4 boules d'un sac contenant 20 boules : 10 vertes, 7 jaunes et 3 rouges. Déterminer le nombre de tirages permettant d'obtenir :

1. 4 boules vertes.
2. 4 boules jaunes.
3. 2 jaunes et 2 rouges.
4. 2 vertes, 1 jaune et 1 rouge.
5. Au moins une boule de chaque couleur.
6. Au moins 3 boules vertes.

Exercice 1.21. Calculer le nombre d'anagrammes (pas nécessairement sensés) des mots suivants :

1. PERE.
2. THEOREME.
3. ANANAS.

Exercice 1.22. Si 10 tableaux noirs doivent être affectés à 4 écoles, de combien de manières peut-on les répartir ? Qu'en est-il si chaque école doit recevoir au moins un tableau ?

Exercice 1.23. Dans une classe de 32 élèves, on compte 19 garçons et 13 filles. On doit élire deux délégués.

1. Quel est le nombre de choix possibles ?

2. Quel est le nombre de choix si l'on impose un garçon et une fille ?
3. Quel est le nombre de choix si l'on impose 2 garçons ?

Exercice 1.24. En utilisant la formule de Pascal itérée, calculer la somme des cubes des m premiers entiers (c'est-à-dire $1^3 + 2^3 + \ldots + m^3$).

1.4 Binômes et multinômes

Théorème 1.9 (Formule du binôme)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}.$$

Quelques conséquences :

- $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n$;
- $\sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} = 0$;
- $\sum_{k=0}^{n} 2^k \binom{n}{k} = 3^n$;

Définition 1.15. Les **nombres multinomiaux** sont définis de la manière suivante :

$$\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_p} = \frac{n!}{n_1! n_2! \ldots n_p!}$$

si $n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n$, et il est égal à zéro autrement.

Théorème 1.10 (Formule du multinôme)**.** Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on a

$$(x_1 + x_2 + \ldots + x_p)^n = \sum_{n_1, n_2, \ldots, n_p \geq 0, n_1 + n_2 + \ldots + n_p = n} \binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_p} x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_p^{n_p}.$$

Proposition 1.1. Soit X un ensemble à n objects et $X_1, X_2, \ldots, X_p$ des cases. Alors $\binom{n}{n_1, n_2, \ldots, n_p}$ est le nombre des rangements possible des objets dans les p cases avec n_1 objets dans la case X_1, n_2 objets dans la case X_2, …, et n_p objets dans la case X_p.

1.4.1 Quatrième série d'exercices

Exercice 1.25. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $p \in \mathbb{Z}$ on a

$$p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}.$$

En déduire que

$$\sum_{p=0}^{n} p\binom{n}{p} = n \cdot 2^{n-1}.$$

Exercice 1.26. Soient $n, p, q \in \mathbb{N}$ tels que $n \leq p + q$. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

Exercice 1.27. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n \neq 0$, on a

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k+1}}{k}\binom{n}{k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} .$$

Exercice 1.28. Quel est le nombre de mots différents peuvent être obtenus en permutant les lettres de MATHEMATIQUES (utiliser les nombres multinomiaux) ?

Exercice 1.29. Combien de possibilités a-t-on de placer n boules indistinguables dans k boîtes distinguables ?

Exercice 1.30. Montrer qu'il y a $\binom{n+k-1}{n}$ vecteurs distincts à composantes entières et non-négatives $[x_1, x_2, \ldots, x_k]$ tels que $x_1 + x_2 + \ldots + x_k = n$.

1.5 Permutations

Définition 1.16. Une **permutation de degré** n est une application bijective de $X := \{1, \ldots, n\}$ dans lui-même.

Théorème 1.11. L'ensemble des permutations de degré n est un groupe, qui s'appelle **groupe symétrique** de degré n et qui est noté S_n ou $\mathrm{Sym}(X)$.

Quelle est la cardinalité de S_n ?

Définition 1.17. Un élément $i \in X$ s'appelle **point fixe** de $\varphi \in S_n$ si $\varphi(i) = i$. On note $\mathrm{Fix}(\varphi)$ l'ensemble des points fixes de φ.

Théorème 1.12. On a

$$\sum_{\varphi \in S_n} \#\mathrm{Fix}(\varphi) = n!.$$

Donc en moyenne on a 1 point fixe par permutation.

Définition 1.18. Un **dérangement** est un permutation sans points fixes.

Théorème 1.13 (Formule du crible)**.** Soit D_n l'ensemble des dérangements de degré n. On a

$$\#D_n = n! \cdot \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Théorème 1.14. Soit $1 \leq n \leq p$. Le nombre de surjections d'un ensemble de cardinalité p dans un ensemble de cardinalité n est

$$\sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} k^p.$$

1.5.1 Cinquième série d'exercices

Exercice 1.31. Une secrétaire a 12 enveloppes portant chacune l'adresse d'un client différent et elle a aussi 12 lettres différentes à envoyer à chacun des 12 clients. Elle ne sait pas pour chaque client quelle lettre doit être destinée, donc elle met au hasard chacune des 12 lettres dans chacune des 12 enveloppes et les poste. Combien des combinaisons lettre-enveloppe y-a-il ? Combien de possibilités y-a-t-il que personne ne reçoit sa lettre ?

Exercice 1.32. Dans une bibliothèque il y a 4 livres, qu'on appelle A, B, C et D. Plusieurs personnes prennent ces livres et ils les remettent dans la bibliothèque dans un ordre différent. On peut associer à chaque personne une permutation des 4 livres qui corresponde à l'ordre dont elle a mis les livres. Si on suppose qu'à chaque personne est associé une permutation différente, quel est le nombre maximal de personnes ? Supposons maintenant qu'il y a 24 personnes et qu'à chaque personne est associé une permutation différente. Combien de personnes ont laissé le livre A dans la position d'origine ? Combien de personnes ont changé la position des tous les livres ?

Exercice 1.33. Soient A et B deux ensembles de cardinalité 6 et 4 respectivement. Combien d'applications de A vers B qui ne sont pas surjectives ni injectives y-a-t-il ?

Exercice 1.34. On considère le cas d'une station de vacances où un groupe de 20 touristes doit être logé dans un hôtel qui a 10 chambres. L'hôtelier loge les touristes de manière que chaque chambre est occupée. En supposant que chaque chambre peut accueillir n'importe quel nombre de personnes, combien y-a-t-il de choix pour l'hôtelier pour repartir les touristes dans les chambres ? Même question, en supposant qu'il y a seulement de chambres doubles.

Chapitre 2

Graphes

2.1 Premières notions sur les graphes

Définition 2.1. Un **graphe** G est un couple $(V(G), E(G))$, où $V(G)$ est un ensemble de **sommets** et $E(G)$ est un ensemble d'**arêtes**, avec une **fonction d'incidence** $\psi_G : E(G) \to \{\text{paires de } V(G)\}$. Si $\psi(e) = \{u, v\}$ on dit que e **relie** u et v, et u et v sont appelés les **extrémités** de e.

- $\#V(G) = v(G)$ est l'**ordre** de G.
- $\#E(G) = e(G)$ est la **taille** de G.
- Les extrémités d'une arête sont dites **incidentes** à cette arête.
- Une arête est dite **incidente** à ses extrémités.
- Deux sommets incidents à une même arête sont dits **adjacents**.
- Deux arêtes incidents à un même sommet sont dits **adjacentes**.
- Deux sommets distincts et adjacents sont dits **voisins** et $N_G(v)$ est l'ensemble des voisins d'un sommet v d'un graphe G.
- Une arête dont les extrémités sont identiques est appelée une **boucle**, sinon elle s'appelle **lien**. Des liens ayant la même paire d'extrémités sont dits **parallèles**.

Types de graphes :

- Un graphe est **simple** s'il n'a ni boucle ni arêtes parallèles.
- Un graphe est **complet** s'il est simple et si deux sommets quelconques sont toujours adjacents.
- Un graphe est **biparti** si son ensemble de sommets peut être partitionné en deux sous-ensembles X et Y tels que toute arêtes a une extrémité dans X et une dans Y.

- Un graphe est **biparti complet** s'il est simple et tout sommet de X est relié à tout sommet de Y.
- Une **étoile** est un graphe biparti complet avec $\#X = 1$ ou $\#Y = 1$.
- Un **chemin** est un graphe simple dont les sommets peuvent être numérotés de manière que deux sommets soient adjacents s'ils sont consécutifs et non adjacents sinon.
- Un **cycle** avec au moins trois sommets est un chemin dont le premier sommet est adjacent au dernier. Un cycle avec un seul sommet est le sommet muni d'une boucle. Un cycle avec deux sommets consiste en deux sommets reliés par une paire d'arêtes parallèles.
- Un graphe est **connexe** si pour toute partition de son ensemble de sommets en deux sous-ensembles non-vides X et Y, il y a une arête avec une extrémité dans X et une dans Y. Autrement, le graphe est **séparé**.

Façons de stoker un graphe :

Définition 2.2. La **matrice d'incidence** d'un graphe G est la matrice $M_G := (m_{v,e})_{v\in V(G), e\in E(G)}$ où $m_{v,e}$ est le nombre de fois où le sommet v et l'arête e sont incidents.

La matrice M_G est une matrice $\#V(G) \times \#E(G)$ à coefficients dans $\{0,1,2\}$.

Définition 2.3. La **matrice d'adjacence** d'un graphe G est la matrice $A_G := (a_{u,v})_{u,v\in V(G)}$ où $a_{u,v}$ est le nombre d'arêtes reliantes les sommets u et v, chaque boucle comptant comme deux arêtes.

- Le **degré** d'un sommet v dans un graphe G est le nombre d'arêtes de G incidentes avec v, chaque boucle comptant comme deux arêtes, et il est noté $d_G(v)$.
- Un graphe G est dit k**-régulier** si $d_G(v) = k$ pour tout $v \in V(G)$. On dit qu'un graphe est **régulier** s'il est k-régulier pour un certain k.

Théorème 2.1. Pour tout graphe G,

$$\sum_{v\in V(G)} d_G(v) = 2 \cdot \#E(G).$$

2.1.1 Sixième série d'exercices

Exercice 2.1. Soit G un graphe simple, $n = \#V(G)$ et $m = \#E(G)$. Montrer que $m \leq \binom{n}{2}$ et déterminer quand il y a l'égalité.

Exercice 2.2. Montrer que dans tout graphe, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Exercice 2.3. Montrer que, dans n'importe quel groupe d'au moins deux personnes, il y en a toujours deux qui ont le même nombre d'amis dans ce groupe.

Exercice 2.4. Montrer que si G est simple et $\#E(G) > \binom{\#V(G)-1}{2}$, alors G est connexe.

2.2 Isomorphismes et automorphismes

Deux graphes G et H sont **identiques** si $V(G) = V(H)$, $E(G) = E(H)$ et $\psi_G = \psi_H$.

Définition 2.4. Deux graphes G et H sont **isomorphes**, ce qui se note $G \cong H$, s'il y a des bijections $\theta : V(G) \to V(H)$ et $\phi : E(G) \to E(H)$ telles que

$$\psi_G(e) = \{u, v\} \Leftrightarrow \psi_H(\phi(e)) = \{\theta(u), \theta(v)\}.$$

Le couple θ et ϕ est appelé **isomorphisme** entre G et H.

Si le graphe est simple, alors ϕ est complètement déterminée par θ.
À isomorphisme près, il n'y a qu'un seul

- graphe complet à n sommets, noté K_n ;
- graphe biparti complet avec des parties de taille n et m, noté $K_{m,n}$;
- chemin à n sommets, noté P_n ;
- cycle à n sommets, noté C_n.

Définition 2.5. Un **automorphisme** d'un graphe est un isomorphisme du graphe dans lui-même. L'ensemble des automorphismes d'un graphe G est noté $\mathrm{Aut}(G)$. On peut vérifier que $\mathrm{Aut}(G)$, muni de la loi de composition, est un groupe, appelé **groupe d'automorphismes** de G.

Le groupe d'automorphisme de K_n est S_n, qui contient toutes les permutations de son ensemble de sommets. En général, pour tout graphe simple à n sommets, $\mathrm{Aut}(G)$ est un sous-groupe de S_n.

Pour $n \geq 3$, le groupe $\mathrm{Aut}(C_n)$ s'appelle **groupe diédral**, il est noté D_n et il a $2n$ éléments.

Un graphe est dit **sommet-transitif** si pour tout couple de sommets u, v, il existe un automorphisme qui envoie u sur v.

2.3 Graphe de Cayley

Soit $(\Gamma; \cdot)$ un groupe et S un ensemble d'éléments de Γ ne contenant pas l'élément neutre. On suppose, de plus, que l'inverse de chaque élément de S est également dans S.

Définition 2.6. Le **graphe de Cayley** de Γ suivant S est le graphe $\mathrm{CG}(\Gamma, S)$ dans lequel l'ensemble des sommets est Γ est deux sommets x et y sont adjacents si et seulement si $xy^{-1} \in S$.

Notons que, comme S est clos par inverse, $xy^{-1} \in S$ ssi $yx^{-1} \in S$, donc la définition est correcte.

Le n-cube Q_n (ici $n \geq 1$) est le graphe dont l'ensemble de sommets est $\{0,1\}^n$ et dans lequel deux n-uplets sont adjacents s'ils diffèrent d'exactement une coordonnée.

Lemme 2.1. Tout n-cube est un graphe de Cayley.

L'application $\alpha_x : y \mapsto yx$ est un automorphisme de G.

Lemme 2.2. Tout graphe de Cayley est sommet-transitif.

Si Γ est un groupe cyclique d'ordre n (i.e. un groupe isomorphe à $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$) et S est composé par l'un de ces générateurs et de son inverse, alors $\mathrm{CG}(\Gamma, S) = C_n$. En général, un **circulant** est un graphe de Cayley où Γ est un groupe cyclique.

2.3.1 Septième série d'exercices

Exercice 2.5. Quelle propriété a-t-il l'ensemble S si le graphe $\mathrm{CG}(\Gamma, S)$ est connexe ?

Exercice 2.6. Soit $S = \{(1\ 2), (1\ 3)\} \subseteq S_3$, où S_3 est le groupe symétrique de degré 3. Dessiner le graphe $\mathrm{CG}(S_3, S)$. Est-il isomorphe à C_6 ? Et si on considère $S' = \{(1\ 2)\}$, le graphe $\mathrm{CG}(S_3, S')$ est connexe ?

Exercice 2.7. Soit $S = \{(1\ 2), (1\ 3), (1\ 4)\} \subseteq S_4$, où S_4 est le groupe symétrique de degré 4. Dessiner le graphe $\mathrm{CG}(S_4, S)$. Est-ce qu'il est un graphe régulier ? Connexe ? Complet ? Biparti ?