Géométrie — 2016–2017
Prof. M. Borello — Université Paris 8

CONTRÔLE CONTINUE N° 1

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Barême : Ex1-5 points, Ex2-5 points, Ex3-10 points,

Exercice 1. *Soit $(\mathcal{A}, V)$ un espace affine. Montrer que par trois points de $\mathcal{A}$ non alignés passe un plan et un seul.*

Solution : soient A, B et C trois points non alignés de $\mathcal{A}$. Par définition de "non alignés", on a

$$\dim\langle \underline{AB}, \underline{AC}\rangle = 2.$$

Donc $\mathcal{P} = A + \langle \underline{AB}, \underline{AC}\rangle$ est une variété affine de dimension 2, à savoir un plan, et $A = A + \underline{0}, B = A + \underline{AB}$ et $C = A + \underline{AC}$ sont dans $\mathcal{P}$.

Soit $(\mathcal{P}', W')$ un (autre) plan qui contient A, B et C. Par le cours on sait que $\mathcal{P}' = A + W'$. De plus, on a que $\underline{AB}$ et $\underline{AC}$ sont dans W', de manière que $\langle \underline{AB}, \underline{AC}\rangle \subseteq W'$. Puisque $\dim\langle \underline{AB}, \underline{AC}\rangle = \dim W' = 2$, on a l'égalité, d'où $\mathcal{P}' = \mathcal{P}$.

Exercice 2. *Soit $(\mathcal{A}, V)$ un espace affine de dimension 4.*
Soient $(\mathcal{P}, W)$ et $(\mathcal{P}', W')$ deux plans affines de $\mathcal{A}$.
Montrer que si $W \cap W' = \{\underline{0}\}$, alors $\#(\mathcal{P} \cap \mathcal{P}') = 1$.

Solution : si $W \cap W' = \{\underline{0}\}$, alors

$$\dim W + W' = \dim W + \dim W' - \dim(W \cap W') = 4,$$

de manière que $W + W' = V$. Par le cours, on a donc que

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' \neq \emptyset.$$

Soit $A \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$. S'il existe $A \neq B \in \mathcal{P} \cap \mathcal{P}'$, alors $\underline{0} \neq \underline{AB} \in W \cap W'$, ce qui donne une contradiction. Ainsi

$$\mathcal{P} \cap \mathcal{P}' = \{A\}.$$

Exercice 3. *Dans* $\mathbb{A}^4(\mathbb{R})$ *soient* $O \equiv (0,0,0,0)$,

$$\mathcal{D}_1 : \begin{cases} x_1 = -s \\ x_2 = 2+s \\ x_3 = 0 \\ x_4 = -1 \end{cases}, s \in \mathbb{R},\ \mathcal{D}_2 : \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = t \\ x_3 = 1 \\ x_4 = 0 \end{cases}, t \in \mathbb{R},\ \mathcal{P} : \begin{cases} x_1 = 1+u+v \\ x_2 = 3+4u \\ x_3 = 1+v \\ x_4 = u \end{cases}, u, v \in \mathbb{R}.$$

a) *Déterminer l'équation cartésienne de l'hyperplan* $\mathcal{H}$ *tel que* $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$ *et* $\mathcal{D}_2$ *est faiblement paralléle à* $\mathcal{H}$.
b) *Déterminer la droite* $\mathcal{D}_3$ *telle que* $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset$, $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset$ *et* $\mathcal{D}_3$ *est faiblement paralléle à* $\mathcal{P}$.
c) *Déterminer* $f \in \mathrm{GA}(\mathbb{A}^4(\mathbb{R}))$ *telle que* $f(O) \in \mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3$ *et* $\mathrm{Fix}(f) = \mathcal{H}$.

Solution :

a) Puisque $\mathcal{P} \subseteq \mathcal{H}$, on a que $P \equiv (1,3,1,0) \in \mathcal{H}$ et $W := \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$ est contenu dans la direction de $\mathcal{H}$.
Puisque $\mathcal{D}_2$ est faiblement paralléle à $\mathcal{H}$, on a que $W' := \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle$ est contenu dans la direction de $\mathcal{H}$.
On a $\dim W + W' = 3$. Alors

$$\mathcal{H} : \begin{cases} x_1 = 1+t+u+v \\ x_2 = 3+t+4u \\ x_3 = 1+v \\ x_4 = u \end{cases}, t, u, v \in \mathbb{R},$$

d'où on obtient l'équation cartésienne, qui est

$$x_1 - x_2 - x_3 + 3x_4 + 3 = 0.$$

b) Une droite $\mathcal{D}_3$ telle que $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset$ et $\mathcal{D}_2 \cap \mathcal{D}_3 \neq \emptyset$ a répresentation parametrique

$$\begin{cases} x_1 = t + (t+s)r \\ x_2 = t + (t-s-2)r \\ x_3 = 1+r \\ x_4 = r \end{cases}, r \in \mathbb{R},$$

pour certains $t, s \in \mathbb{R}$. Si de plus $\mathcal{D}_3$ est faiblement paralléle à $\mathcal{P}$, on a que

$$\begin{bmatrix} t+s \\ t-s-2 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \in \langle \begin{bmatrix} 1 \\ 4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} \rangle,$$

ce qui donne $t+s = 1+1$ et $t-s-2 = 4+0$, d'où $t = 4$ et $s = -2$. Alors

$$\mathcal{D}_3 : \begin{cases} x_1 = 4+2r \\ x_2 = 4+4r \\ x_3 = 1+r \\ x_4 = r \end{cases}, r \in \mathbb{R}.$$

c) On a $\mathcal{D}_1 \cap \mathcal{D}_3 = \{A\}$ avec $A \equiv (2, 0, 0, -1)$. Notons que $O \notin \mathcal{H}$ et $A \notin \mathcal{H}$. Pour déterminer f, il suffit donc de choisir quatres points, disons B, C, D et E, dans $\mathcal{H}$, tels que $\operatorname{aff}(\{B, C, D, E\}) = \mathcal{H}$ et chercher f telle que

$$f(O) = A,\ f(B) = B,\ f(C) = C,\ f(D) = D \text{ et } f(E) = E.$$

En effet, soit O, B, C, D, E soit A, B, C, D, E sont des repères affines et une transformation affine est clairement déterminée par l'image d'un repère affine. De plus, si $f(B) = B$, $f(C) = C$, $f(D) = D$ et $f(E) = E$ on a $\mathcal{H} = \operatorname{aff}(\{B, C, D, E\}) \subseteq \operatorname{Fix}(f)$. En étant $\operatorname{Fix}(f)$ une variété affine de dimension au plus 4 (en effet, on a par exemple $O \notin \operatorname{Fix}(f)$), on a que $\operatorname{Fix}(f) = \mathcal{H}$.

En choisissant $B = P$, $C \equiv (2, 4, 1, 0)$, $D \equiv (2, 7, 1, 1)$, et $E \equiv (2, 3, 2, 0)$ on obtient la formule analytique pour f :

$$f : \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5/3 & -2/3 & -2/3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -1/3 & 1/3 & 1/3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{bmatrix}.$$