RATTRAPAGE

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Barême : Ex1-10 points, Ex2-10 points.

Exercice 1. *Soit V un espace vectoriel de dimension 4 sur un corps $\mathbb{K}$ et soit $\mathcal{E} := \mathbb{P}(V)$ l'espace projectif qui en est issu.*
Soient $\mathcal{R}_1$ et $\mathcal{R}_2$ deux droites projectives dans $\mathcal{E}$ telles que $\mathcal{R}_1 \cap \mathcal{R}_2 = \emptyset$.
Soit A un point projectif dans $\mathcal{E}$ tel que $A \notin \mathcal{R}_1$ et $A \notin \mathcal{R}_2$.
Soit $\mathcal{P}_i$ un sous-espace projectif ($\neq \mathcal{E}$) tel que $\mathcal{R}_i \subseteq \mathcal{P}_i$ et $A \in \mathcal{P}_i$, pour $i \in \{1, 2\}$.

a) *Quelle est la dimension de $\mathcal{P}_i$, pour $i \in \{1, 2\}$?*
b) *Quelle est la dimension de $\mathcal{P}_1 \cap \mathcal{P}_2$?*
c) *En déduire qu'il existe une droite projective $\mathcal{R}_3$ telle que $A \in \mathcal{R}_3$ et telle que $\mathcal{R}_3 \cap \mathcal{R}_i \neq \emptyset$ pour $i \in \{1, 2\}$. Est-elle unique ?*

Exercice 2. *Soit* $\mathcal{E} = (\mathbb{A}^3(\mathbb{R}), \mathbb{R}^3)$ *l'espace euclidien de dimension* 3 *avec produit scalaire* $(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{3} x_i y_i$. *Soit* $A \equiv (1, 0, -1)$ *un point de* $\mathcal{E}$ *et soit*

$$\mathcal{R} : \begin{cases} x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ x_3 - 1 = 0 \end{cases}$$

une droite dans $\mathcal{E}$ *(équations cartésiennes). Enfin, pour un certain* $\kappa \in \mathbb{R}$, *soit*

$$\mathcal{S}_\kappa := \begin{cases} x_1 = t \\ x_2 = \kappa + \kappa t \\ x_3 = 2 - \kappa - \kappa t \end{cases} \quad , \ t \in \mathbb{R}$$

une autre droite dans $\mathcal{E}$ *(représentation paramétrique).*

a) *Trouver* $\kappa \in \mathbb{R}$ *tel que* $\mathcal{R} \cap \mathcal{S}_\kappa \neq \emptyset$ *et trouver le point d'intersection.*
b) *Trouver une représentation paramétrique de la droite* $\mathcal{T}$ *parallèle à* $\mathcal{R}$ *et telle que* $A \in \mathcal{T}$.
c) *Soit* $\kappa = 1$ *et* $\mathcal{S} := \mathcal{S}_1$. *Trouver la distance entre* $\mathcal{S}$ *et* $\mathcal{R}$.