Contrôle final

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

La qualité de la rédaction sera prise en compte.

Exercice 1. Soit $\mathbb{F}_9 = \mathbb{F}_3[\alpha]$, oú $\alpha^2 = \alpha + 1$.

Soit C le code linéaire sur $\mathbb{F}_9$ dont une matrice génératrice est

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & \alpha^2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 2 & \alpha^6 \end{bmatrix}.$$

a) Quel sont les paramètres de C ? Justifier.

b) Est-ce que $C^\perp$ est un code MDS ? Justifier.

c) Est-ce que $C^\perp$ est un code parfait ? Justifier.

d) Montrer que
$$c = (0, 0, 1, 1, 0, 0)$$
appartient à C.

e) Montrer que
$$v = (\alpha^3, \alpha^2, 0, 0, 0, \alpha^2).$$
n'appartient pas à $C^\perp$. Le corriger.

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....

Exercice 2. Soit C un $[n,k,d]$ code binaire, $M := \#C$ son cardinal et

$$d_H : \mathbb{F}_2^n \times \mathbb{F}_2^n \to \mathbb{N}$$

la distance de Hamming.

a) Montrer que

$$\sum_{c,c' \in C,\ c \neq c'} d_H(c,c') \geq M(M-1)d.$$

b) Soit A la matrice $M \times n$ dont les lignes sont tous les éléments de C et x_i le poids de la colonne $a^{(i)}$ de A, pour $i \in \{1,\ldots,n\}$. Montrer que

$$\sum_{c,c' \in C,\ c \neq c'} d_H(c,c') = \sum_{i=1}^{n} 2x_i(M-x_i).$$

c) En déduire que

$$M(M-1)d \leq \frac{1}{2}nM^2.$$

d) Est-ce qu'un $[10,4,6]$ code existe ?

NOM Prénom : ....

Numéro d'étudiant : ....