Théorie des catégories et propriétés universelles

Elyes Boughattas

Abstract

On commence par définir les termes de la théorie des catégories pour ensuite s'intéresser aux propriétés universelles qui apparaissent d'elles-mêmes dans l'étude et la description de différentes structures algébriques. On propose une définition de la notion de propriété universelle dans ce langage. On l'illustre enfin par des exemples.

La théorie des catégories a été développée dans les années 1940 par Saunders Mac Lane et Samuel Eilenberg. Elle permet d'avoir un point de vue unifié sur les structures mathématiques et les relations entre ces structures : en ce sens, elle apporte un point de vue général. Il faut cependant noter que l'étude qui suit présuppose la théorie des ensembles (qu'on peut chercher à approfondir dans l'ouvrage *Set Theory* de Kenneth Kunen).

Il est difficile de trouver une définition formelle de la notion de propriété universelle : par exemple, dans [1] Mac Lane n'utilise l'expression que dans son introduction alors que dans [2] Lang fait appel à cette notion sans l'avoir préalablement définie. Il s'agit en fait de définir une structure à l'aide d'un diagramme qui la rende unique à unique isomorphisme près.

Ainsi la définition qui sera donnée dans un premier temps n'est pas standard mais capture le cas d'un nombre important de propriétés universelles. Il faut néanmoins se placer au préalable dans le langage de la théorie des catégories pour en donner une définition précise.

Table des Matières

1 Un peu de théorie des catégories

1.1 Catégories

On définit d'abord ce qu'est une catégorie :

Définition 1.1 *Une catégorie $\mathfrak{C}$ est la donnée :*

(i) d'une classe d'objets, notée $\mathfrak{ob}(\mathfrak{C})$;

(ii) d'une classe de flèches notée $\mathfrak{arr}(\mathfrak{C})$;

(iii) d'une fonction dom *qui envoie chaque flèche sur un objet, appelé le domaine de la flèche ;*

(iv) d'une fonction cod *qui envoie chaque flèche sur un objet, appelé le codomaine de la flèche ;*

(v) d'une flèche $id_{\mathfrak{a}}$ pour chaque objet $\mathfrak{a}$ de domaine et de codomaine $\mathfrak{a}$. On note $\mathbf{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ la classe des flèches de $\mathfrak{a}$ vers $\mathfrak{b}$;

(vi) d'une fonction de composition $\circ$ qui envoie chaque couple de flèches $< f, g >$ où $\operatorname{cod} f = \operatorname{dom} g$ sur une flèche $g \circ f$ de $\operatorname{dom} f$ vers $\operatorname{cod} g$;

vérifiant les axiomes suivants :

1. *(associativité) pour des flèches $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{b}$, $\mathfrak{b} \xrightarrow{g} \mathfrak{c}$ et $\mathfrak{c} \xrightarrow{h} \mathfrak{d}$ on a $(h \circ g) \circ f = h \circ (g \circ f)$ qu'on note $h \circ g \circ f$*
2. *(unité) pour une flèche $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{b}$ on a $id_{\mathfrak{b}} \circ f = f = f \circ id_{\mathfrak{a}}$*

Définissons ensuite les isomorphismes entre objets d'une catégorie :

Définition 1.2 *Une flèche $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{b}$ d'une catégorie est appelée un isomorphisme lorsqu'il existe $\mathfrak{b} \xrightarrow{g} \mathfrak{a}$ telle que $g \circ f = id_{\mathfrak{a}}$ et $f \circ g = id_{\mathfrak{b}}$. Une telle flèche g est alors unique et on le note f^{-1}.*

On illustre la définition d'une catégorie en donnant quelques exemples usuelles :

Définition 1.3 *(i)* **Set***: les objets sont les ensembles et les flèches sont les fonctions.*

(ii) **Grp***: les objets sont les groupes et les flèches les morphismes entre ces groupes.*

(iii) **CRng***: les objets sont les anneaux commutatifs et les flèches les morphismes entre ces anneaux.*

(iv) **k-Ev***: les objets sont les espaces vectoriels sur le corps k et les flèches les morphismes linéaires entre eux.*

(v) **Top***: les objets sont les espaces topologiques et les flèches les applications continues.*

(vi) **Ab***: les objets sont les groupes abéliens et les flèches les morphismes.*

(vii) **Cat***: les objets sont les catégories et les flèches les foncteurs (cf. infra).*

(viii) si $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ sont des catégories, **Fnc***($\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$) : les objets sont les foncteurs de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$ et les flèches les transformations naturelles entre ces foncteurs (cf. infra).*

Il est à noter que dans chaque cas (sauf les deux derniers) on se place dans un univers de la théorie des ensembles.

Simplifions enfin notre cadre d'étude en définissant les catégories localement petites :

Définition 1.4 *Une catégorie est dite localement petite si pour toute paire d'objets, les flèches allant du premier vers le second forment un ensemble: nous ne considérerons que de telles catégories dans la suite.*

Le langage des catégories nous permet de définir la notion de diagramme commutatif :

Définition 1.5 *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie. Un* ***diagramme*** *sur $\mathfrak{C}$ est un multigraphe orienté dont les sommets sont des éléments de $\mathfrak{ob}(\mathfrak{C})$ et les arêtes orientées des éléments de $\mathfrak{arr}(\mathfrak{C})$ ayant pour domaine et codomaine les nœuds qu'ils relient. Un tel diagramme est dit* ***commutatif*** *lorsque pour tous sommets $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{b}$, la composée des flèches dans un chemin de $\mathfrak{a}$ vers $\mathfrak{b}$ est indépendante du chemin considéré.*

1.2 Foncteurs

Il s'agit maintenant de définir une notion de flèches entre les catégories elles-mêmes :

Définition 1.6 *Soient $\mathfrak{A}$ et $\mathfrak{B}$ deux catégories. Un foncteur F de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$ est la donnée de deux fonctions (encore notées F) de $\mathfrak{ob}(\mathfrak{A})$ vers $\mathfrak{ob}(\mathfrak{B})$ et de $\mathfrak{arr}(\mathfrak{A})$ vers $\mathfrak{arr}(\mathfrak{B})$ telles que :*

(i) pour une flèche $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{b}$, on ait $F(\mathfrak{a}) \xrightarrow{F(f)} F(\mathfrak{b})$;

(ii) pour un objet $\mathfrak{a}$, on ait $F(id_{\mathfrak{a}}) = id_{F(\mathfrak{a})}$;

(iii) pour g et f deux flèches composables, $F(g \circ f) = F(g) \circ F(f)$.

Voici quelques exemples de foncteurs :

Proposition 1.1 *(i) Si $n \geq 1$ alors $\mathbf{CRng} \xrightarrow{Gl_n} \mathbf{Grp}$ qui envoie A sur $Gl_n(A)$ et $A \xrightarrow{f} B$ sur $Gl_n(A) \xrightarrow{Gl_n(f)} Gl_n(B)$ (laquelle applique f à chaque coefficient de la matrice de départ : elle est bien définie car l'image d'un inversible par f est inversible) est un foncteur.*

(ii) $\mathbf{Grp} \xrightarrow{F} \mathbf{Ab}$ qui envoie G sur $G/D(G)$ et $G \xrightarrow{f} H$ sur $G/D(G) \xrightarrow{F(f)} H/D(H)$ (où $F(f)$ est le quotient de $\pi \circ f$ modulo $D(G)$ avec π le morphisme canonique $H \to H/D(H)$) est un foncteur.

(iii) $\mathbf{CRng} \xrightarrow{*} \mathbf{Grp}$ qui envoie A sur $A^{\times}$ et $A \xrightarrow{f} B$ sur son induit est un foncteur.

1.3 Transformations naturelles

On cherche maintenant à définir les flèches de la catégorie des foncteurs de $\mathfrak{A}$ vers $\mathfrak{B}$:

Définition 1.7 *Soient $F, G : \mathfrak{A} \to \mathfrak{B}$ deux foncteurs. Une transformation naturelle τ de F vers G est la donnée d'une classe de flèches $F(\mathfrak{a}) \xrightarrow{\tau_{\mathfrak{a}}} G(\mathfrak{a})$ pour $\mathfrak{a} \in \mathfrak{ob}(\mathfrak{A})$ telle que pour toute flèche $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{a}'$ de $\mathfrak{A}$ le diagramme suivant commute :*

$$\begin{tikzcd} F(\mathfrak{a}) \arrow[r, "\tau\mathfrak{a}"] \arrow[d, "F(f)"'] & G(\mathfrak{a}) \arrow[d, "G(f)"] \\ F(\mathfrak{a}') \arrow[r, "\tau\mathfrak{a}'"'] & G(\mathfrak{a}') \end{tikzcd}$$

On dit qu'une telle transformation naturelle τ est un isomorphisme naturelle entre F et G lorsque pour tout $\mathfrak{a} \in \mathfrak{A}$, $\tau\mathfrak{a}$ est inversible. La classe τ^{-1} des $(\tau\mathfrak{a})^{-1}$ est alors une transformation naturelle de G vers F.

Donnons un exemple de transformation naturelle :

Proposition 1.2 *Soit $n \geq 1$ et pour un anneau A soit $Gl_n(A) \xrightarrow{det_A} A^\times$ l'application déterminant.* det *est alors une transformation naturelle de Gl_n vers $*$.*

1.4 Foncteurs représentables

On commence par définir une certaine classe de foncteurs sur les catégories (qu'on rappelle avoir supposées localement petites) :

Définition 1.8 *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie. Pour $\mathfrak{a}$ un objet de $\mathfrak{C}$ on note $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}, \_) : \mathfrak{C} \to \mathbf{Set}$ le foncteur qui envoie un objet $\mathfrak{b}$ sur $\mathbf{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ et une flèche $\mathfrak{b} \xrightarrow{f} \mathfrak{c}$ sur l'application $g \in \mathbf{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \to f \circ g \in \mathbf{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{c})$.*

On définit ensuite la notion de foncteur représentable :

Définition 1.9 *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie et $F : \mathfrak{C} \to \mathbf{Set}$ un foncteur. On dit que F est représentable s'il existe $\mathfrak{a}$ un objet de $\mathfrak{C}$ et un isomorphisme naturel entre F et $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}, \_)$.*

La caractérisation suivante des foncteurs représentables nous sera utile par la suite :

Proposition 1.3 *Soit $\mathfrak{C}$ une catégorie et $F : \mathfrak{C} \to \mathbf{Set}$ un foncteur. Le foncteur F est représentable si et seulement s'il existe $\mathfrak{a}$ dans $\mathfrak{C}$ et $a \in F(\mathfrak{a})$ tels que pour tout $\mathfrak{b}$ dans $\mathfrak{C}$, $f \to F(f)(a)$ est bijective de $\mathbf{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ sur $F(\mathfrak{b})$.*
Dans ce cas, on dit que $(\mathfrak{a}, a)$ est un représentant de F et que a est un objet universel relativement au foncteur F.

Preuve : Supposons F représentable et soit $\mathfrak{a} \in \mathfrak{ob}(\mathfrak{C})$ et τ un isomorphisme naturel entre $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}, \_)$ et F. Pour $\mathfrak{b} \in \mathfrak{ob}(\mathfrak{C})$ et $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{b}$ le diagramme suivant commute :

$$\begin{tikzcd} \mathbf{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{a}) \arrow[r, "\tau\mathfrak{a}"] \arrow[d, "\mathfrak{C}(\mathfrak{a},\_)(f)"'] & F(\mathfrak{a}) \arrow[d, "F(f)"] \\ \mathbf{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \arrow[r, "\tau\mathfrak{b}"'] & F(\mathfrak{b}) \end{tikzcd}$$

Ainsi $\tau\mathfrak{b} \circ \mathfrak{C}(\mathfrak{a}, \_)(f) = F(f) \circ \tau\mathfrak{a}$ et en appliquant en $id_{\mathfrak{a}}$ on obtient $\tau\mathfrak{b}(f) = F(f)(\tau\mathfrak{a}(id_{\mathfrak{a}}))$ et puisque $\tau\mathfrak{b}$ est bijective on obtient le résultat avec $a = \tau\mathfrak{a}(id_{\mathfrak{a}}(\mathfrak{a}))$.

Réciproquement, soient $\mathfrak{a} \in \mathfrak{ob}(\mathfrak{C})$ et $a \in F(\mathfrak{a})$ comme dans l'énoncé et pour $\mathfrak{b} \in \mathfrak{ob}(\mathfrak{C})$ la flèche $\mathbf{Hom}_{\mathfrak{C}}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b}) \xrightarrow{\tau\mathfrak{b}} F(\mathfrak{b})$ définie par $\tau\mathfrak{b}(f) = F(f)(a)$ (pour une flèche $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{b}$). En notant que les $\tau\mathfrak{b}$ sont bijectives, il est aisé de vérifier que τ définit un isomorphisme naturel entre F et $\mathfrak{C}(\mathfrak{a}, \_)$, d'où le résultat. $\square$

Le proposition suivante assure l'unicité à unique isomorphisme près d'un tel représentant :

Proposition 1.4 *Soit F un foncteur représentable, $(\mathfrak{a}, a)$ et $(\mathfrak{b}, b)$ deux représentants. Il existe alors un unique isomorphisme $\mathfrak{a} \xrightarrow{f} \mathfrak{b}$ tel que $F(f)(a) = b$.*

Preuve : Soient $(\mathfrak{a}, a)$ et $(\mathfrak{b}, b)$ deux représentants de F. On dispose donc d'uniques flèches $f \in \mathbf{Hom}(\mathfrak{a}, \mathfrak{b})$ et $g \in \mathbf{Hom}(\mathfrak{b}, \mathfrak{a})$ tels que $F(f)(a) = b$ et $F(g)(b) = a$.
Ainsi, $F(g \circ f)(a) = F(g) \circ F(f)(a) = F(g)(F(f)(a)) = F(g)(b) = a$. Or $F(id_{\mathfrak{a}})(a) = a$ donc $g \circ f = id_{\mathfrak{a}}$. De façon analogue, on obtient $f \circ g = id_{\mathfrak{b}}$: ainsi f convient, ce qui conclut. $\square$

2 Propriétés universelles

2.1 Définition

On peut alors introduire ce que signifie qu'une structure vérifie une propriété universelle :

Définition 2.1 *Soit $\mathfrak{a}$ un objet d'une catégorie $\mathfrak{C}$, a un ensemble et F un foncteur de $\mathfrak{C}$ dans* **Set**. *On dit que $(\mathfrak{a}, a)$ vérifie la propriété universelle décrite par F si c'est un représentant de F.*

2.2 Exemples

2.2.1 Propriété universelle du groupe quotient

Soit G un groupe, $H \triangleleft G$ et $\pi : G \to G/H$ la surjection canonique et soit le foncteur F défini par :

$$F : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{ob}(\mathbf{Grp}) & \longrightarrow & \mathfrak{ob}(\mathbf{Set}) \\ L & \longmapsto & \{f \in \mathbf{Hom}(G, L) : H \leq \ker f\} \end{array} \right.$$

$$F : \left| \begin{array}{rcl} \mathfrak{arr}(\mathbf{Grp}) & \longrightarrow & \mathfrak{arr}(\mathbf{Set}) \\ f \in \mathbf{Hom}(K, L) & \longmapsto & \left| \begin{array}{rcl} \{\phi \in \mathbf{Hom}(G, K) : H \leq \ker f\} & \longrightarrow & \{\psi \in \mathbf{Hom}(G, L) : H \leq \ker f\} \\ \phi & \longmapsto & f \circ \phi \end{array} \right. \end{array} \right.$$

On définit alors la propriété universelle du groupe quotient G/H :

Définition 2.2 *On dit de tout représentant qui vérifie la propriété universelle de F qu'il vérifie la* ***propriété universelle du quotient de** G **par** H.*

Le couple $(G/H, \pi)$ vérifie la propriété universelle du quotient et de plus, la proposition 1.4 assure l'unicité d'un tel représentant à unique isomorphisme près. On résume en général cela en affirmant que (K, ϕ) vérifie la propriété du quotient si pour tout L et $G \xrightarrow{f} L$ morphisme il existe un unique $K \xrightarrow{\tilde{f}} L$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} G \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & K \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & L & \end{tikzcd}$$

Dans les exemples suivants, l'action des foncteurs sur les flèches n'est pas détaillée.

2.2.2 Propriété universelle du groupe libre

Soit S un ensemble, $L(S)$ le groupe libre sur S (vu comme un ensemble de mots comme en cours) et $\iota : S \to L(S)$ l'injection canonique. Posons :

$$F : \left| \begin{array}{rcl} \mathbf{Grp} & \longrightarrow & \mathbf{Set} \\ G & \longmapsto & G^S \end{array} \right.$$

On définit alors la propriété universelle du groupe libre sur S :

Définition 2.3 *On dit de tout représentant qui vérifie la propriété universelle de F qu'il vérifie la* ***propriété universelle du groupe libre sur*** *S.*

Le couple $(L(S), \iota)$ vérifie la propriété universelle du groupe libre. Par la proposition 1.4 on a encore l'unicité d'un tel représentant à unique isomorphisme près. On résume en général cela en affirmant que (L, ϕ) vérifie la propriété du quotient si pour tout G et $f \in G^S$ il existe un unique morphisme $L \xrightarrow{\tilde{f}} G$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} S \arrow[rr, "\varphi"] \arrow[dr, "f"'] & & L \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & G & \end{tikzcd}$$

2.2.3 Propriété universelle du produit tensoriel

Soient E,F deux espaces vectoriels sur un corps k, $E \otimes F$ leur produit tensoriel et $\phi : E \times F \to E \otimes F$ l'application "produit" associée. Posons :

$$F : \left| \begin{array}{rcl} \textbf{k-Ev} & \longrightarrow & \textbf{Set} \\ V & \longmapsto & Bil(E \times F, V) \end{array} \right.$$

On définit alors la propriété universelle du produit tensoriel de E par F :

Définition 2.4 *On dit de tout représentant qui vérifie la propriété universelle de F qu'il vérifie la* ***propriété universelle du produit tensoriel de*** *E* ***par*** *F.*

Le couple $(E \otimes F, \phi)$ vérifie la propriété universelle du produit tensoriel. Par la proposition 1.4 on a encore l'unicité d'un tel représentant à unique isomorphisme près. On résume en général cela en affirmant que (T, ψ) vérifie la propriété du quotient si pour tout V et $f \in Bil(E \times F, V)$ il existe une unique application linéaire $T \xrightarrow{\tilde{f}} V$ qui rende commutatif le diagramme suivant :

$$\begin{tikzcd} E \times F \arrow[rr, "\psi"] \arrow[dr, "f"'] & & T \arrow[dl, "\tilde{f}"] \\ & V & \end{tikzcd}$$

3 Conclusion

Il est légitime de se demander s'il y a un intérêt à une telle formalisation de la notion de propriété universelle.

D'une part, cette formalisation permet de considérer comme un acquis l'unicité d'une structure la vérifiant (proposition 1.4).

D'autre part, si j'ai ici adopté le point de vue où on disposait préalablement d'un représentant, certains théorèmes généraux sur les foncteurs représentables assurent l'existence d'un tel représentant sans que nous n'ayons à le construire.

4 Références

[1] Saunders Mac Lane. *Categories for the working mathematician.* Springer-Verlag, 1971.

[2] Serge Lang. *Algèbre.* Dunod, 1993.

[3] Antoine Ducros. Foncteurs représentables. https://webusers.imj-prg.fr/~antoine.ducros/fonctrep.pdf, 2003.