

## Feuille de TD n°1

### Exercice 1

Sur les champs de directions de la page 2, repérer l'isocline de pente 0, les régions où la pente est positive, négative, non définie. Dessiner quelques solutions.

Associer ensuite les champs de direction aux équations suivantes : (1)  $x' = \frac{x-2}{t-1}$  ; (2)  $x' = 2$  ; (3)  $x' = -\frac{t}{x}$  ; (4)  $x' = t$  ; (5)  $x' = x - t$  ; (6)  $x' = tx^2 + t^2$  ; (7)  $x' = x$  ; (8)  $x' = \frac{x}{t}$ .

### Exercice 2

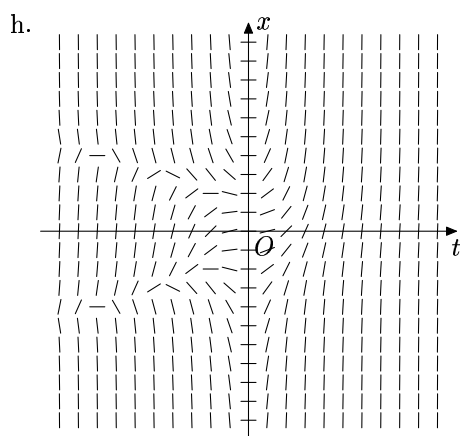
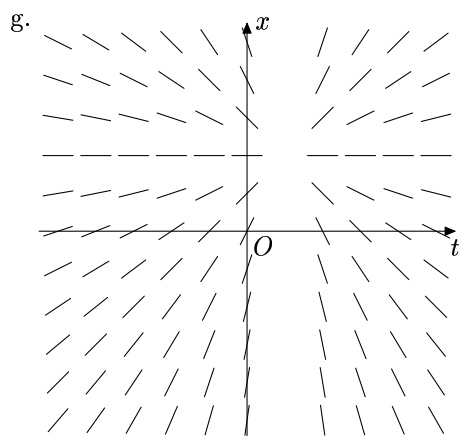
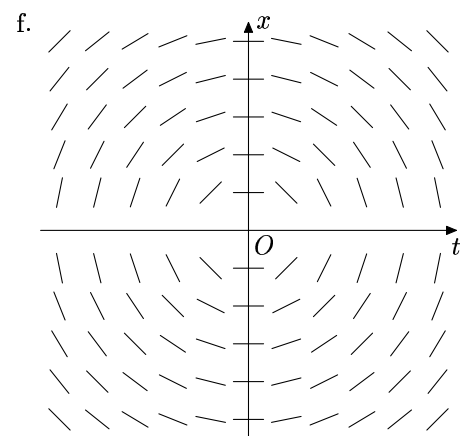
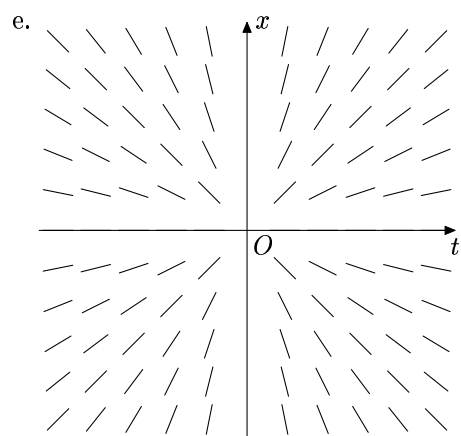
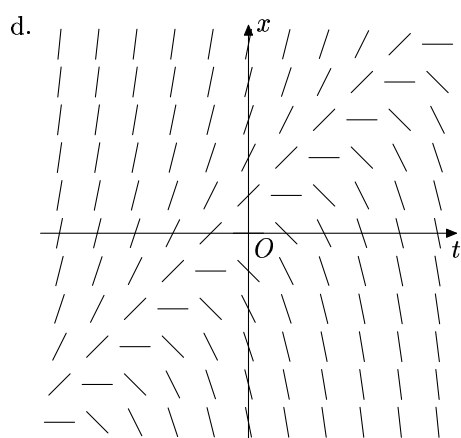
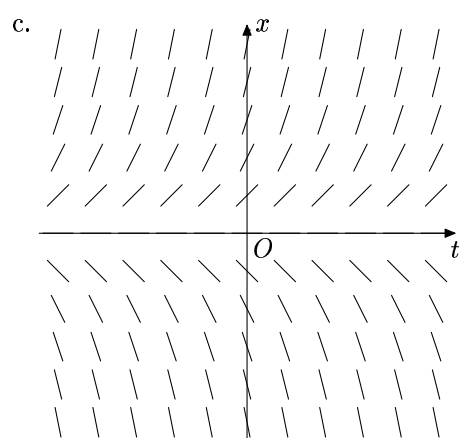
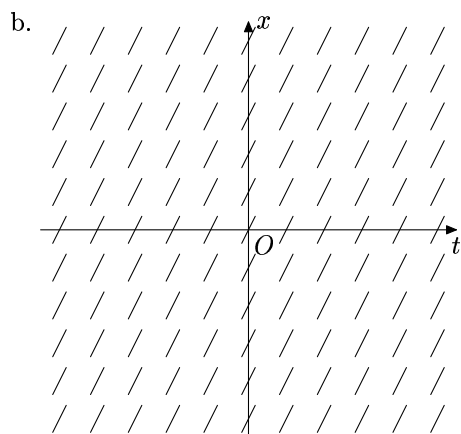
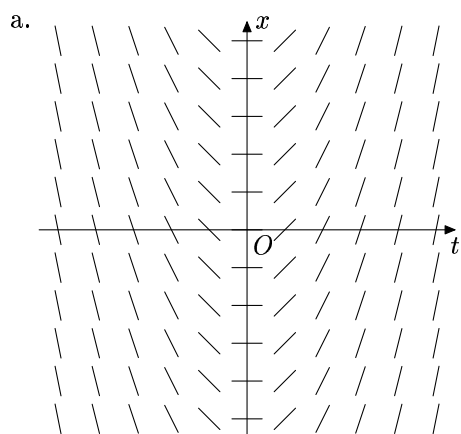
On considère l'équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = x^{2/3}$ .

1. Tracer le champ de direction correspondant.
2. Vérifier que les fonctions  $\varphi_a(t) = [\frac{1}{3}(t - a)]^3$  fournissent des solutions de l'équation différentielle.
3. Trouver une solution simple qui n'est pas de la forme précédente.
4. Montrer que le problème de Cauchy de condition initiale  $x(t_0) = x_0$  admet une infinité de solutions.
5. Comparer avec l'équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = x$  étudiée en cours.

### Exercice 3

On considère l'équation différentielle  $\frac{dx}{dt} = x^2 - 1$ .

1. Tracer le champ de direction correspondant.
2. Donner deux solutions simples de l'équation.
3. Quelle est l'allure des autres solutions ?
4. Vérifier que la formule  $x = \frac{1-C \exp(2t)}{1+C \exp(2t)}$  fournit des solutions de l'équation différentielle. Donner les intervalles de définition de ces solutions. Quelles valeurs de  $C$  correspondent aux différentes solutions repérées à la question 3 ?



## Exercice 4

On considère une équation différentielle de la forme  $\frac{dx}{dt} = f(t)$ .

1. On pose d'abord  $f(t) = t$ . Résoudre l'équation différentielle et montrer que si  $x = \varphi(t)$  est une solution, alors  $x = \varphi(t) + a$  est une autre solution. Comment cette propriété se traduit-elle sur le champ de direction ?
2. On considère maintenant une équation générale de la forme ci-dessus. Montrer que si  $x = \varphi(t)$  est une solution sur l'intervalle  $I$ , alors  $x = \varphi(t) + a$  est une autre solution sur le même intervalle.
3. Résoudre le problème de Cauchy de condition initiale  $x(t_0) = x_0$  sur un intervalle  $I$  où  $f$  est définie.

## Exercice 5 — Symétries

On considère une équation différentielle de la forme  $\frac{dx}{dt} = f(t, x)$ .

1. Quelle propriété la fonction  $f$  doit-elle posséder pour que le champ de direction soit invariant par les translations horizontales ? Quelle conséquence cela aura-t-il sur les solutions de l'équation ? Vérifier ce résultat en reprenant les équations différentielles qui possèdent cette propriété dans les exercices précédents.
2. Quelle symétrie possède le champ de direction lorsque  $f(t, x) = -f(-t, x)$  ?
3. Quelle condition faut-il imposer à  $f$  pour que l'image d'une solution par la symétrie d'axe  $(Ot)$  soit encore une solution ?