

## Feuille de TD n°2 : Equations résolubles

### Exemples d'équations

#### Exercice 1

Pour chacun des systèmes et équations suivants, dire s'il est linéaire, linéaire homogène, linéaire à coefficients constants, à variables séparables.

$$(1) \begin{cases} \frac{du_1}{dt} = t^2 + tu_1 \\ \frac{du_2}{dt} = 5u_2 + \frac{t}{1+t^2}u_1 + \pi \exp(5t) \end{cases} \quad (2) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 2x + 3y \\ \frac{dy}{dt} = -5x + y \end{cases}$$

$$(3) x' = \frac{t^2}{1+t^4}x; \quad (4) \frac{dy}{dt} = y^2 + t^2; \quad (5) \frac{dx}{dt} = t^2x + t^2;$$

$$(6) x' = \frac{\sin(\omega t)}{1-t^3} + \omega x; \quad (7) x' = x \sin(2\pi t) + \frac{\pi}{2} - (\tan^2(\pi t) + 1).$$

$$(8) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = x - 7y + t^2 \\ \frac{dy}{dt} = -5x + 3y - 7t \end{cases} \quad (9) \begin{cases} \frac{dx}{dt} = 4x + 3t - y^2 \\ \frac{dy}{dt} = -5x - 7t + y \end{cases}$$

$$(10) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - t = ty \\ \frac{dy}{dt} - x = 45t - 2y \end{cases} \quad (11) \begin{cases} \frac{dx}{dt} + 2x - t = xy \\ \frac{dy}{dt} - x + y = 4t^2 \end{cases}$$

### Résolutions effectives

#### Exercice 2

Résoudre les équations différentielles suivantes sur l'intervalle d'étude spécifié.

(a)  $x' + x = \cos(t) - \sin(t)$ .  $I = \mathbb{R}$ .

(b)  $x' - \frac{1}{t}x = t \cos(t)$ .  $I = \mathbb{R}_+^*$ .

#### Exercice 3

Résoudre les équations suivantes en prenant garde aux intervalles de définition des solutions, et représenter graphiquement l'ensemble des solutions (on pourra s'aider des champs de directions).

(a)  $2tx' + 4x + t = 0$ .

(b)  $x' = -tx$ .

(c)  $x' - \frac{2}{t+1}x = (t+1)^{\frac{5}{2}}$ . Montrer que l'image d'une courbe solution par la symétrie d'axe ( $t = -1$ ) est encore une solution.

(d)  $2e^t x^2 x' = t + 2$ .

Pour les équations suivantes, on pensera à utiliser les formules de trigonométrie sphérique et hyperbolique, ou les formules d'intégration correspondantes.

(e)  $(1 - t^2)x' - tx = 1$ .

(f)  $x' = \frac{1+x^2}{1+t^2}$ .

### Autres techniques

#### Exercice 4 — Séries entières

Donner une solution développable en série entière de l'équation différentielle :  $tx'' + x = 0$ .

#### \*Exercice 5 — Recherche d'une solution périodique

Soit  $a$  un réel non nul,  $f$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$  et périodique de période  $T > 0$ . Montrer que l'équation différentielle  $x' + ax = f(t)$  possède une unique solution périodique sur  $\mathbb{R}$ .

Démarche :

(a) Donner la forme générale des solutions de l'équation et en déduire l'unicité.

(b) Pour l'existence, écrire la solution générale de l'équation (par variation de la constante), et choisir une constante qui rende la solution périodique.

### Changement de variable

#### Exercice 6

On étudie les équations de Bernoulli qui sont les équations différentielles de la forme :

$$x' + p(t)x = q(t)x^n$$

où  $p$  et  $q$  sont des fonctions continues sur  $\mathbb{R}$  et  $n$  est un entier naturel non nul.

(a) On suppose que  $x$  est une solution qui ne s'annule pas sur son intervalle de définition. Quelle équation différentielle doit vérifier la fonction  $u = \frac{1}{x^n}$  ?

(b) Résoudre l'équation différentielle :  $x' + x = x^2(\cos(t) - \sin(t))$ .

#### Exercice 7

On étudie les équations d'Euler qui sont les équations différentielles de la forme :

$$t^2 x'' + atx' + bx = g(t)$$

où  $a$  et  $b$  sont des réels et  $g$  une fonction continue de  $\mathbb{R}$  dans  $\mathbb{R}$ .

a. Pour  $t > 0$ , poser  $t = e^u$  pour se ramener à une équation à coefficients constants.

b. Résoudre par cette méthode le problème de Cauchy :  $t^2 x'' + tx' + x = 0$  avec  $x(1) = 0$  et  $x'(1) = 2$ .