Feuille de TD n°3 : Etudes qualitatives d'équations

On se propose dans ce TD d'étudier des équations qu'on ne sait pas intégrer explicitement : on ne dispose alors que des méthodes qualitatives et numériques (mais les méthodes numériques, seules, ne peuvent pas donner d'information fiable sur le comportement à long terme).

Exercice 1

On considère l'équation différentielle du premier ordre $x' = x^2 + t^2$ (1).
1. Donner une transformation du plan qui conserve les graphes des solutions.

On souhaite à présent montrer que si $(]a, b[, \varphi)$ *est une solution de l'équation, a et b sont finis.*

2. Résoudre l'équation $x' = x^2 + 1$ (1'). Donner les intervalles de définition des solutions.
3. Soit $\varphi_{t_0}(t)$ la solution de (1') qui vaut 0 en t_0. On suppose $t_0 > 1$. Montrer que le graphe de $\varphi_{t_0}(t)$ est une barrière inférieure stricte pour l'équation (1).
4. En déduire que les solutions de (1) tendent vers l'infini en temps fini.
5. En utilisant **1**, montrer que les solutions de (1) sont définies sur un intervalle borné.

On peut aussi retrouver ce résultat sans utiliser la notion de barrière en donnant, "à la main", une estimation du temps de vie des solutions.

6. En écrivant pour $t \geqslant 1$ que $x' \geqslant x^2 + 1$ et en intégrant cette inégalité, montrer que b est fini. Conclure en utilisant **1**.

Exercice 2

Cet exercice est tiré du partiel de l'an dernier.

On considère l'équation différentielle : $x' = x^2 - t^2$.

1. Soit (I, φ) une solution de cette équation définie et dérivable sur l'intervalle I de la droite réelle. Montrer que la fonction définie sur l'intervalle $-I$ par $\psi(t) = -\varphi(-t)$ est encore solution de l'équation. En déduire une symétrie sur l'ensemble des solutions.
2. Déterminer l'isocline de pente 0, la tracer puis régionner le plan en définissant les régions du plan où les solutions sont croissantes (respectivement décroissantes).
3. Montrer que la demi-droite $\{x = t,\ t > 0\}$ est une barrière supérieure stricte et que la demi-droite $\{x = -t,\ t > 0\}$ est une barrière inférieure stricte. Soit $t_0 > 0$. Montrer qu'une solution (I, φ) qui vérifie $-t_0 < \varphi(t_0) < t_0$, vérifie :

$$\forall t > t_0,\ -t < \varphi(t) < t.$$

4. En considérant l'isocline de pente 1 (respectivement de pente -2), déterminer une barrière inférieure stricte située au dessus de la première bissectrice et une barrière supérieure stricte située au dessus de la seconde bissectrice (toujours pour t croissant).

On admettra le résultat suivant :
Les solutions, définies sur $[0, +\infty[$ *et vérifiant* $-t_0 < \varphi(t_0) < t_0$*, satisfont les inégalités suivantes :*

$$-t < \varphi(t) < -\sqrt{t^2 - 2}$$

pour t assez grand.

5. On considère deux solutions φ_1 et φ_2 dont on suppose qu'elles vérifient

$$\forall t > 0,\ t < \varphi_1(t) < \varphi_2(t) < \sqrt{t^2 + 1}$$

Montrer que $\varphi_2 - \varphi_1$ est croissante et en déduire qu'il ne peut exister qu'une unique solution vérifiant :

$$\forall t > 0,\ t < \varphi(t) < \sqrt{t^2 + 1}$$

6. Résumer les résultats précédents par un schéma donnant l'allure de quelques solutions.

Problème

On se propose dans ce problème d'étudier en détail l'équation suivante :

$$x' = tx^2 + t^2 = f(t,x). \qquad (1)$$

1. Tracer les isoclines de pente 0 et repérer les régions où la pente est positive (resp. négative). La suite du problème vise à préciser ce schéma.

Préliminaire

Nous utiliserons comme barrières les solutions de l'équation $x' = tx^2$. (2')
2. Résoudre l'équation (2'), préciser les intervalles de définition et représenter quelques solutions de chaque type.
3. Vérifier que l'allure des solutions ne change pas si on étudie l'équation similaire $x' = \frac{tx^2}{2}$. (2")

Étude de l'équation (1) pour $t \geqslant 0$

4. Montrer que les solutions de l'équation (2') pour $t > 0$ sont des barrières inférieures strictes pour l'équation (1).
5. En déduire que toute solution de (1) qui passe par un point (t_0, x_0) avec $t_0 \geqslant 0$ et $x_0 > 0$ tend vers l'infini en temps fini. Ceci vaut en particulier pour les solutions vérifiant $x(0) > 0$.
6. Montrer ensuite que toute solution qui passe par un point (t_0, x_0) avec $t_0 \geqslant 0$ tend vers $+\infty$ en temps fini. On pourra montrer qu'une telle solution repasse dans le demi-plan supérieur et se ramener à la question **5**.
7. En utilisant un autre type de solutions de (2'), montrer qu'il y a des solutions de l'équation (1) définies sur un intervalle $]a, b[$ avec $a > 0$, qui tendent vers $-\infty$ quand t tend vers a. La borne b peut-elle être infinie ?

Étude pour $t \leqslant 0$

Afin d'étudier les solutions dans le demi-plan $t \leqslant 0$ plus facilement, on va étudier une équation dont les solutions sont les symétriques par rapport à l'axe des ordonnées des solutions de (1).
8. Montrer que si $g(t,x) = -f(-t,x)$, les graphes des solutions de l'équation $x' = g(t,x)$ sont obtenus à partir de ceux des solutions de $x' = f(t,x)$ en effectuant une symétrie par rapport à l'axe des ordonnées (on raisonnera sur les champs de direction des deux équations). On étudie donc l'équation :

$$x' = tx^2 - t^2 \qquad (2)$$

pour $t \geqslant 0$.
9. Dans le demi-plan $t \geqslant 0$, tracer l'isocline de pente 0 de l'équation (2), et marquer les régions où la pente est positive (resp. négative).
10. Montrer que toute solution qui entre dans la zone $(P) = \{t \geqslant x^2\}$ n'en sort plus.
11. On note $(E_-) = \{(t,x); x \leqslant -\sqrt(t)\}$. Montrer que toutes les solutions issues d'un point de (E_-) entrent dans (P).
12. Montrer que la courbe α définie par

$$\alpha(t) = \begin{cases} 0 & \text{sur} \quad [0,1] \\ -t+1 & \text{sur} \quad [1,2] \\ -\sqrt{t-1} & \text{sur} \quad [2,+\infty[\end{cases}$$

est une barrière supérieure. En déduire que toutes les solutions issues d'un point de (E_-) sont asymptotes à une même courbe pour t tendant vers l'infini.
13. Montrer que les solutions de (2") sont des barrières inférieures dans la zone $(F_-) = \{\frac{x^2}{2} \geqslant t; x \leqslant 0\}$. En déduire que les solutions dans (E_-) sont de deux types.

On admettra que toutes les solutions entrant dans la zone (P) sont asymptotes en $+\infty$ à la courbe $x = -\sqrt{t}$.

14. Il reste à étudier les solutions dans la zone $(E_+) = \{x^2 \geqslant t; x \geqslant 0\}$. On connaît déjà celles qui entrent dans la zone (P). Montrer que la courbe $\gamma(t) = \sqrt{t+1}$ est une barrière inférieure pour $t \geqslant 1$.
15. Montrer que les solutions de (2") sont des barrières inférieures dans la région (F_+) symétrique de (F_-) par rapport à l'axe des abscisses. Montrer que toutes les solutions qui passent au-dessus de γ pour $t > 1$ atteignent (F_+) et y restent. En déduire que ces solutions tendent vers l'infini en temps fini.
16. Vérifier que les deux courbes $x = \sqrt{t}$ et γ forment un anti-entonnoir. Il y a donc une unique solution qui reste entre ces deux courbes quand t tend vers l'infini ; on note x_c la valeur de cette solution pour $t = 0$. Ainsi, dans le demi-plan $t \geqslant 0$, on peut distinguer trois types de solutions pour l'équation (2) : toutes les solutions telles que $x(0) < x_c$ entrent dans la région (P), y restent et admettent une même asymptote ; pour $x(0) > x_c$, les solutions tendent vers l'infini en temps fini ; entre ces deux familles de solutions, il y a une solution singulière qui est asymptote à $x = \sqrt{t}$.
17. Traduire ces résultats pour l'équation de départ (1) et récapituler tous les types de solutions de cette équation.