**Université Denis Diderot** **2004-2005**
**DEUG $2^{ème}$ année** **$2^{ème}$ semestre**
**Module MT286 : Équations différentielles**

# Feuille de TD n°4 : Systèmes différentiels linéaires

**Exercice 1**

**1.** Résoudre le système différentiel linéaire suivant :

$$U' = AU$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$$

**2.** Déterminer la solution valant ${}^t(1,1,5)$ en $t = 0$.

**Exercice 2**

**1.** Résoudre le système différentiel linéaire suivant :

$$X' = AX$$

avec :

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & 3 & 4 \end{bmatrix}$$

**2.** Déterminer la solution valant ${}^t(1,1,0)$ en $t = 0$.

**Exercice 3**

*Cet exercice est tiré du partiel de l'an dernier.*

On considère le système différentiel $U' = AU$ où $A$ est donnée par la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

**1.** Montrez que les fonctions

$$\exp(-2t)\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \exp(3t)\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sont solutions du système différentiel $U' = AU$.
**2.** En déduire une base des solutions du système différentiel. Déterminer la solution de ce système valant ${}^t(1,1,1)$ en $t = 0$.

**Exercice 4**

Résolvez le système d'équations différentielles suivant :

$$\begin{cases} \frac{dx}{dt} & = & -\frac{3}{2}x + 2y - \frac{1}{2}z \\ \frac{dy}{dt} & = & -x + z \\ \frac{dz}{dt} & = & \frac{3}{2}x - 6y + \frac{9}{2}z \end{cases}$$

**Exercice 5**

On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

**1.** Montrez que le polynôme caractéristique de $A$ que l'on note $\chi_A$ vaut :

$$\chi_A(X) = -X^3 + 2X^2 - X$$

**2.** Montrez que $A$ n'est pas diagonalisable.
**3.** En admettant le théorème de Cayley-Hamilton qui nous dit que $\chi_A(A) = 0$, montrez par récurrence sur $n$ que :

$$\forall n \geq 1,\ A^n = (n-1)A^2 - (n-2)A$$

**4.** Calculez l'exponentielle de la matrice $tA$ où $t$ est un réel quelconque. On rappelle que :

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}$$

**5.** Résoudre le problème de Cauchy :

$$\begin{cases} X' & = & AX \\ X(0) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{cases}$$

On pourra montrer au préalable le résultat général suivant :
*La solution du problème de Cauchy* $\begin{cases} y' & = & Ay \\ y(0) & = & y_0 \end{cases}$ *est donnée par* $y(t) = e^{tA}y_0$.