Université Denis Diderot **2004-2005**
DEUG $2^{ème}$ année **$2^{ème}$ semestre**
Module MT286 : Équations différentielles

Feuille de TD n°5 : Systèmes autonomes dans le plan

Systèmes autonomes linéaires

Exercice 1

1. Résolvez le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et représentez les trajectoires des solutions dans le plan (x, y).

2. Résolvez le système $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et représentez les trajectoires des solutions dans le plan (x, y).

3. Etudiez dans chacun des deux exemples précédents la stabilité du point $(0, 0)$.

Exercice 2

1. Résolvez le système $\begin{pmatrix} x' \\ y' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$ et représentez les trajectoires des solutions dans le plan (x, y).

2. Résolvez le système $\begin{pmatrix} u' \\ v' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$ et représentez les trajectoires des solutions dans le plan (x, y).

3. Etudiez dans chacun des deux exemples précédents la stabilité du point $(0, 0)$.

Exercice 3

1. Ecrire l'équation linéaire du second ordre à coefficients constants $x'' - kx' + x = 0$ sous forme d'un système d'équations du premier ordre.

2. Etudiez le système ainsi obtenu et tracez les trajectoires des solutions dans le plan (x, y). On distinguera les cas $k < -2$, $k > 2$, $k = 0$, $0 < k < 2$, $-2 < k < 0$, $k = 2$ et $k = -2$.

Exemples de systèmes autonomes non linéaires

Exercice 4

On considère le système différentiel dans le plan suivant :

$$\begin{cases} x' &= 1 - x^2 \\ y' &= -y \end{cases}$$

1. Calculez explicitement la solution de ce système vérifiant $x(0) = x_0$ et $y(0) = y_0$. Si $|x_0| \neq 1$, on remarquera que la courbe solution est le graphe d'une fonction $y(x)$ que l'on calculera explicitement.
2. Déterminez les points singuliers du système, et pour chacun d'eux, le système linéarisé correspondant et le type du point. En déduire l'allure des courbes intégrales du système au voisinage de chacun des points singuliers.
3. Indiquez sur un dessin l'allure globale des courbes intégrales du champ.

Exercice 5

On considère le système différentiel dans le quart de plan $(x \geq 0, y \geq 0)$ suivant :

$$\begin{cases} x' &= x(1 - x - y) \\ y' &= y(\frac{3}{4} - y - \frac{1}{2}x) \end{cases}$$

1. Déterminez les points singuliers du système, et pour chacun d'eux, le système linéarisé correspondant et le type du point. En déduire l'allure des courbes intégrales du système au voisinage de chacun des points singuliers.
2. Etudiez la stabilité de chacun des points singuliers.
3. Indiquez sur un dessin l'allure globale des courbes intégrales du champ.

Exercice 6

Mêmes questions qu'à l'exercice précédent avec le système différentiel définit dans le quart de plan $(x \geq 0, y \geq 0)$ suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & x(1-x-y) \\ y' & = & y(\frac{1}{2} - \frac{1}{4}y - \frac{3}{4}x) \end{array} \right.$$

Technique du passage en coordonnées polaires

Exercice 7

On considère le système différentiel dans le plan suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -y - x(x^2+y^2) \\ y' & = & x - y(x^2+y^2) \end{array} \right.$$

1. Montrez que $(0,0)$ est point singulier pour ce système. Quelle est sa nature ? Décrire les trajectoires du linéarisé en $(0,0)$.
2. En effectuant un changement de variable en polaire, déterminer les courbes solutions du système.
***3.** Ces courbes pouvaient-elles se déduire de celles du linéarisé par un homéomorphisme au voisinage de $(0,0)$?

Exercice 8

Cet exercice est inspiré de l'examen final de l'an dernier.

On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & 4y + x(4-x^2-y^2) \\ y' & = & -4x + y(4-x^2-y^2) \end{array} \right.$$

1. Montrez que ce système admet un unique point d'équilibre. En déterminer le caractère stable ou instable.
2. On pose :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x & = & r\cos\theta \\ y & = & r\sin\theta \end{array} \right.$$

Déterminez l'expression donnant x' et y' en fonction de r' et de θ'. En déduire l'équation différentielle satisfaite par θ lorsque (x,y) est solution du système et complétez l'étude menée à la première question en donnant l'allure des trajectoires au voisinage du point d'équilibre.
3. Déterminez de même l'équation différentielle satisfaite par r lorsque (x,y) est solution du système. En déduire l'existence d'une unique trajectoire circulaire.
4. Donnez l'allure générale des trajectoires du système de départ. Pour cela on pourra faire une étude qualitative de l'équation $r' = r(4-r^2)$.

Stabilité de Lyapounov

Exercice 9

On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x^3/2 + 2xy^2 \\ y' & = & -y^3 \end{array} \right.$$

1. Enoncez le théorème du cours portant sur les fonctions de Lyapounov.
2. Construisez une fonction de Lyapounov V convenable et montrez que l'origine est un point singulier asymptotiquement stable. (Indication : On la cherchera sous la forme $\alpha x^2 + \beta y^2$).

Exercice 10

On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -x^3 + xy^2 \\ y' & = & -2x^2y - y^3 \end{array} \right.$$

Trouvez une fonction de Lyapounov sous la forme $ax^2 + 2bxy + cy^2$ qui permette de déterminer la nature du point singulier $(0,0)$.

Exercice 11

On considère le système différentiel suivant :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} x' & = & -\frac{3}{2}y - \frac{1}{2}xy \\ y' & = & \frac{1}{2}x + \frac{1}{4}xy \end{array} \right.$$

Etudiez la nature du point singulier $(0,0)$. Pour étudier la stabilité on cherchera une fonction de Lyapounov de la forme $V(x,y) = F(x) + G(y)$.