Feuille de TD n°1 : Un peu d'analyse fonctionnelle

Exercice 1

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs complexes, muni de la norme $|| \ ||_\infty$. On se donne un réel α tel que $0 < \alpha < 1$ et on note E_α le sous-espace de E constitué des fonctions f telles qu'il existe une constante $A > 0$ pour laquelle :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$$

On munit E_α de la norme :

$$||f||_\alpha = ||f||_\infty + \sup_{0 \leq x \neq y \leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Alors $(E_\alpha, || \ ||_\alpha)$ est un espace de Banach. Soit F un sous-espace fermé de E. On suppose que F est contenu dans E_α et on se propose de montrer que F est de dimension finie.

1. Montrer que F est fermé dans E_α.

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout élément f de F, $||f||_\alpha \leq C||f||_\infty$.

3. Conclure en étudiant la boule unité de F.

Exercice 2

On désigne par $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ l'ensemble des distributions tempérées sur $\mathbb{R}^d$. On introduit les espaces de Sobolev pour $s \in \mathbb{R}$:

$$H^s(\mathbb{R}^d) = \{u \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d) \mid (1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}(\xi) \in L^2(\mathbb{R}^d)\}$$

Et si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ on pose : $||u||_s = ||(1+|\xi|^2)^{\frac{s}{2}}\hat{u}||_2$. Muni de cette norme, $H^s(\mathbb{R}^d)$ est un espace de Banach.

Question préliminaire : Démontrer le théorème d'injection de Sobolev : *Si $u \in H^s(\mathbb{R}^d)$ avec $s > \frac{d}{2}$, alors u est continue et tend vers 0 à l'infini. De plus :*

$$||u||_\infty \leq C||u||_s$$

Soit $P = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha D^\alpha$ avec $D = \frac{1}{i}\frac{\partial}{\partial x}$ pour $x \in \mathbb{R}^d$. P est un opérateur différentiel à coefficients constants, d'ordre m, sur $\mathbb{R}^d$. A P, on associe le polynôme p défini par : $p(\xi) = \sum_{|\alpha| \leq m} a_\alpha \xi^\alpha$. Puis on pose : $p_m(\xi) = \sum_{|\alpha| = m} a_\alpha \xi^\alpha$. On dit alors que l'opérateur P est elliptique si : $p_m(\xi) = 0 \Rightarrow \xi = 0$.

1. Montrer qu'il existe $C_0 > 0$ tel que $|p_m(\xi)| \geq C_0|\xi|^m$ puis qu'il existe $C_1 > 0$ et $R > 0$ tels que $|p(\xi)| \geq C_1|\xi|^m$ pour $|\xi| \geq R$.

2. Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$, $\chi = 1$ sur $\{|\xi| \leq R\}$. On pose $v(\xi) = \frac{1-\chi(\xi)}{p(\xi)}$. Montrer que $v \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et en déduire qu'il existe $E \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^d)$ et $\omega \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^d)$ (espace de Schwartz) tels que :

$$PE = \delta_0 + \omega$$

où δ_0 désigne la distribution de Dirac en 0. On dit que E est une pramétrixe de P.

3. Soit $\beta \in \mathbb{N}^d$. Montrer qu'il existe $\alpha \in \mathbb{N}^d$ tel que $\partial^\beta(x^\alpha E)$ soit continue. En déduire que $E \in C^\infty(\mathbb{R}^d \backslash \{0\})$.

4. Soit $f \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$. Montrer que si $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ est telle que $Pu = f$, alors $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d)$.

Exercice 3

Soit $E = L^1(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques localement intégrables sur R, muni de la norme :

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|dx$$

Soit $F = c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des familles $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.
On se propose de montrer que l'application suivante n'est pas surjective :

$$T : \begin{array}{ccl} E & \rightarrow & F \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \end{array}$$

1. Rappeler pourquoi T est bien définie, continue et injective.

2. Montrer que si T est surjective, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$||f||_{L^1} \leq \delta \sup |c_n(f)|$$

3. Pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, 2π-périodique, on choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes de module 1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{\alpha}c_n(g) = |c_n(f)|$. En appliquant la question 2 à

$$f_N = \sum_{|n| \leq N} \alpha_n e^{inx},$$

montrer que, si T est surjective, pour tout $N \leq 0$,

$$\sum_{|n| \leq N} |c_n(g)| \leq \delta ||g||_\infty$$

4. Conclure.