Université Denis Diderot **2005-2006**
Niveau M2 Maths Fondamentales 1^{er} **semestre**
Module : Analyse Spectrale

Feuille de TD n°2 : Opérateurs bornés, opérateurs compacts, Spectre

Exercice 1

En considérant l'espace $\ell^\infty(\mathbb{N}, \mathbb{C})$ des suites complexes bornées, donnez un exemple d'opérateur injectif non surjectif et un exemple d'opérateur surjectif non injectif.

Exercice 2

Soit $X \subset \mathbb{R}^d$ et μ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}^d$. Soit $\varphi : X \to \mathbb{C}$ mesurable telle que $\varphi(x) \neq 0$ pour presque tout x dans X.
On définit M_φ l'opérateur de $L^2(X)$ dans lui-même par $D(M_\varphi) = \{f \in L^2(X) \mid f\varphi \in L^2(X)\}$ et :

$$\forall f \in D(M_\varphi),\ M_\varphi f = \varphi f$$

1. Montrez que $D(M_\varphi)$ et $R(M_\varphi)$ (l'image de M_φ) sont denses dans $L^2(X)$.
2. Montrez que $D(M_\varphi) = L^2(X)$ si et seulement si il existe $C > 0$ telle que pour presque tout x, $|\varphi(x)| < C$.
3. Montrez que $R(M_\varphi) = L^2(X)$ si et seulement si il existe $C > 0$ telle que pour presque tout x, $|\varphi(x)| > \frac{1}{C}$.
4. On suppose $d = 1$, $X = \mathbb{R}$ et $\varphi(x) = x$. Montrez que $(I - M_\varphi)^{-1}$ existe mais n'est pas bornée.

Exercice 3

Soit X une espace métrique compact. Soit μ une mesure positive finie sur les boréliens de X. Soit $K \in \mathcal{C}(X \times X)$ une application continue sur $X \times X$. On considère sur l'espace $\mathcal{C}(X)$ des applications continues sur X, l'opérateur définit par :

$$Tu(x) = \int_X K(x,y)u(y)d\mu(y),\ D(T) = \mathcal{C}(X)$$

Montrez que T est compact.

Exercice 4

Soit $K : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{C}$ une fonction continue. On considère l'opérateur $T : \mathcal{C}([a,b]) \to \mathcal{C}([a,b])$ défini par :

$$D(T) = \mathcal{C}([a,b]) \text{ et } Tu(x) = \int_a^x K(x,y)u(y)dy$$

Montrer que : $\sigma(T) = \{0\}$.

Exercice 5

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur $[0,1]$, à valeurs complexes, muni de la norme infinie $||\ ||_\infty$.

On note $T_0 : E \to E$ l'opérateur de domaine E et définit par : $T_0u(x) = xu(x),\ \forall x \in [0,1]$.

On définit aussi pour $f \in E$ l'opérateur L de domaine E défini par : $Lu = \int_0^1 f(x)u(x)dx$.

Enfin si $g \in E$ on considère l'opérateur T de domaine E : $Tu = T_0u + (Lu)g$.

1. Soit $\lambda \in [0,1]$. Montrez que si $g(\lambda) = 0$, alors $T - \lambda$ n'est pas surjectif. Dans le cas où $g(\lambda) \neq 0$, montrez que la fonction $h : x \mapsto \sqrt{|x - \lambda|}$ n'est pas dans l'image de $T - \lambda$.

En déduire que le spectre $\sigma(T)$ de T contient $[0,1]$.

2. Démontrez que $\sigma(T) \setminus [0,1]$ est constitué de valeurs propres dont les sous-espaces propres sont de dimension 1. Caractérisez ces valeurs propres comme l'ensemble des solutions d'une équation $F(\lambda) = 0$ où F est une fonction holomorphe sur $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ que l'on exprimera à l'aide de f et de g. En déduire que $\mathbb{C} \setminus [0,1]$ est discret.

3. On suppose que pour tout $x \in [0,1]$, $f(x) = 1$ et $g(x) = \alpha$, α étant un réel non nul. Déterminez $\sigma(T)$.

Exercice 6

Soit E l'espace $\ell^\infty(\mathbb{Z})$ des suites bornées $u = (u_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes, muni de la norme :

$$||u||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |u_n|$$

Soit T l'opérateur sur E de domaine E définit par :

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (Tu)_n = u_{n+1}$$

1. Calculez la norme de T.

2. Montrez que tout nombre complexe de module 1 est valeur propre de T.

3. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. Soit $u \in E$. On note $(T - \lambda)u = f$. Pour tout entier $p \geq 1$, exprimez u_n en fonction de $f_{n-1}, \dots, f_{n-p}$ et de u_{n-p}. Que devient cette expression lorsque p tend vers $+\infty$? En déduire que λ n'appartient pas au spectre de T.
4. En utilisant les résultats des questions précédentes, déterminez le spectre de T.

On considère le sous-espace fermé F de E constitué des suites u telles que $u_n = 0$ pour tout $n > 0$. Alors $T(F) \subset F$ et on désigne par T_F l'opérateur induit par T sur F.

5. Soit $\lambda \in \mathbb{C}$ tel que $|\lambda| < 1$. En utilisant l'expression de $(T - \lambda)^{-1}$ trouvée à la question 3, montrez que λ appartient au spectre de T_F.
6. En utilisant les résultats des questions 1 et 5, déterminez le spectre de T_F. Comparez avec le résultat obtenu à la question 4.

Exercice 7

Soit E et F deux espaces de Hilbert sur $\mathbb{C}$. $T: E \to F$ linéaire est dit Hilbert-Schmidt (HS) lorsqu'il existe $M > 0$ tel que pour tout système orthonormé $\{e_1, \dots, e_n, \dots\}$ de E on ait :

$$\forall N, \ \sum_{j=1}^{N} ||Te_j||^2 \leq M$$

On note $||T||_{HS}$ le plus petit M vérifiant cette inégalité.
1. Soit T un opérateur HS, soit $\varepsilon > 0$ et $\{e_1, \dots, e_N\}$ un système orthonormé de E tel que :

$$\sum_{j=1}^{N} ||Te_j||^2 \geq ||T||_{HS} - \varepsilon^2$$

Si P désigne le projecteur orthogonal sur $Vect(e_1, \dots, e_N)$, montrez que : $||T - TP|| < \varepsilon$. En déduire que T est compact.
2. Si $E = L^2(Y)$ et $F = L^2(X)$, soit $K \in L^2(X \times Y)$. Montrez que l'opérateur T_K de domaine $L^2(Y)$ définit par :

$$T_K : \ u \mapsto T_K u(x) = \int_Y K(x,y)u(y)dy$$

est Hilbert-Schmidt.
3. Réciproquement, si $T: \ L^2(Y) \to L^2(X)$ est HS, montrez qu'il existe $K \in L^2(X \times Y)$ tel que $T = T_K$.
4. *Un exemple* : On considère l'opérateur T de $L^2([0, 2\pi])$ dans lui-même, de domaine :

$$D(T) = \{f \ C^2(V([0, 2\pi])) \mid f(0) = f(2\pi) = 0\}$$

donné par $Tf = f'' + qf$ où q est continue de $[0, 2\pi]$ dans $\mathbb{R}$. Montrez que T n'est pas HS, mais que $T^{-1}: \ R(T) \to D(T)$ est HS.