

## Feuille de TD n°3 : Opérateurs autoadjoints, Familles Spectrales

### Exercice 1

Soit  $S$  l'opérateur symétrique non borné défini sur  $L^2(]0, 1[)$  par  $D(S) = C_0^\infty(]0, 1[)$  et  $Su = -iu'$  pour  $u \in D(S)$ .

On se propose de déterminer toutes les extensions autoadjointes de  $S$ . On désigne par  $H^1(]0, 1[)$  l'espace des fonctions  $u \in L^2(]0, 1[)$  telles que  $u' \in L^2(]0, 1[)$ .

1. Montrer que l'adjoint de  $S$  est donné par  $D(S^*) = H^1(]0, 1[)$  et  $S^*u = -iu'$ . Pour  $u, v \in H^1(]0, 1[)$ , exprimer, en fonction de  $u(0), v(0), u(1), v(1)$ , la quantité  $(S^*u|v) - (u|S^*v)$ .

2. Soit  $\alpha$  un nombre complexe. On introduit l'opérateur suivant :

$$D(A_\alpha) = \{u \in H^1(]0, 1[), u(1) = \alpha u(0)\}, A_\alpha u = -iu'$$

a. A quelle condition sur  $\alpha$  l'opérateur  $A_\alpha$  est-il symétrique? Montrer qu'il est alors autoadjoint. Indication : on pourra vérifier que la forme linéaire  $v \mapsto v(0)$  n'est pas continue pour la norme  $L^2$  sur  $D(A_\alpha)$ .

b. On suppose que  $\alpha$  est tel que  $A_\alpha$  soit autoadjoint. Déterminer les fonctions propres et les valeurs propres de  $A_\alpha$ . Que peut-on dire du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions propres? En déduire le spectre de  $A_\alpha$ .

3. Soit  $A$  une extension symétrique de  $S$ .

a. Montrer que  $D(A) \subset H^1(]0, 1[)$  et établir, pour tout couple  $(u, v)$  d'éléments de  $D(A)$  l'identité :

$$u(1)\overline{v(1)} = u(0)\overline{v(0)}$$

b. Montrer qu'il existe un nombre complexe  $\alpha$  tel que  $A \subset A_\alpha$ . En déduire toutes les extensions autoadjointes de  $S$ .

### Exercice 2

Etude du laplacien en une dimension.

On note :  $\mathcal{A}_2(]a, b[) = \{h \in C^1(]a, b[), h' \text{ AC}\}$ . On rappelle que si  $g \in L^2(a, b)$  il existe  $h \in \mathcal{A}_2(]a, b[)$  telle que :  $h''(x) = g(x)$  pour tout  $x \in ]a, b[$ .

Soit  $]a, b[$  un intervalle ouvert de  $\mathbb{R}$  et  $T_0$  l'opérateur défini par :

$$D(T_0) = C_0^\infty(]a, b[), \forall f \in D(T_0), T_0 f = -f''$$

1. Vérifiez que  $T_0$  est symétrique.

2. Montrez que l'image de  $T_0$ ,  $R(T_0)$ , est constituée des éléments  $k \in C_0^\infty(]a, b[)$  tels que :  $\int_a^b x^j k(x) dx = 0$ , pour  $j = 0, 1$ .

3. Soit  $T$  l'opérateur défini par :

$$D(T) = \{f \in \mathcal{A}_2(]a, b[) \cap L^2(]a, b[), f'' \in L^2(]a, b[)\}$$

et :  $\forall f \in D(T), Tf = -f''$ . Montrez que :  $T_0^* = T$ .

4. Si  $]a, b[ = \mathbb{R}$  montrez que  $\overline{T_0} = T$  et que  $T$  est autoadjoint. Ainsi  $T_0$  est essentiellement autoadjoint.

5. Si  $]a, b[ = \mathbb{R}$  montrez que  $\sigma(\overline{T_0}) = [0, +\infty[$  et que  $\sigma_p(\overline{T_0}) = \emptyset$ .

6. On suppose  $]a, b[ \neq \mathbb{R}$  et borné. Soit  $T_1$  l'opérateur défini par :

$$D(T_1) = \{f \in C^\infty([a, b]), f(a) = f(b) = 0\}$$

et :  $\forall f \in D(T_1), T_1 f = -f''$ .

a. Montrez que  $T_1$  est essentiellement autoadjoint.

b. Montrez que :  $\sigma(\overline{T_1}) = \sigma_p(\overline{T_1})$ . Dans le cas où  $]a, b[ = ]0, 2\pi[$ , vérifiez que :

$$\sigma(\overline{T_1}) = \left\{ \frac{n^2}{4} \mid n \in \mathbb{N}^* \right\}$$

### Exercice 3

Soit  $T$  un opérateur autoadjoint agissant sur un espace de Hilbert  $H$  et  $E : \mathbb{R} \rightarrow \mathcal{B}(H)$  la famille spectrale de  $T$ .

1. Soit  $u : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$  une fonction borélienne. Montrez que :

$$s \in \sigma(E(u)) \iff E(u^{-1}(]s - \varepsilon, s + \varepsilon[)) > 0$$

En déduire que  $\sigma(E(u)) = u(\sigma(T))$ .

2. Montrez que  $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$  si et seulement si  $(T - z)^{-1}$  est compact pour tout  $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$ .

3. Soit  $u(t) = e^{it}$  et  $U = E(u)$ . Montrez que  $U$  est unitaire.

### Exercice 4

Le laplacien discret en dimension un.

Soit  $\Delta$  l'opérateur défini par :  $D(\Delta) = \ell^2(\mathbb{Z})$  et pour toute suite  $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$  :

$$\forall n \in \mathbb{Z}, (\Delta u)_n = -(u_{n-1} + u_{n+1})$$

1. Montrez que  $\Delta$  est autoadjoint.

2. Calculez le spectre de  $\Delta$ . Vérifiez que ce spectre est réduit au spectre essentiel de  $\Delta$ .

3. Soit  $\varphi$  la fonction définie sur  $[0, 2\pi]$  par :  $\varphi(x) = -2 \cos(x)$ . On note  $M_\varphi$  l'opérateur de multiplication par  $\varphi$ . Soit enfin  $X(t) = \{x \in [0, 2\pi], \varphi(x) \leq t\}$ .

On pose pour  $f \in L^2([0, 2\pi])$  :  $E(t)f = \chi_{X(t)} f$ . Montrez que  $E(t)$  est une famille spectrale et que  $E(id) = M_\varphi$ .

4. Soit  $\mu_f$  la mesure associée à  $f$  et à  $E(t)$ . Montrez que pour tout  $f$ ,  $\mu_f$  est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour cela on montrera que si  $f \in C^1([0, 2\pi])$  alors  $t \mapsto \mu_f(]-\infty, t])$  est de classe  $C^1$  sur  $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$ .

Qu'en déduit-on pour le spectre de  $\Delta$ ?