Université Denis Diderot **2006-2007**
Niveau M2 Maths Fondamentales 1^{er} **semestre**
Module : Analyse Spectrale

Feuille de TD n°1 : Un peu d'analyse fonctionnelle

Exercice 1

On désigne par E l'espace de Banach des fonctions continues sur l'intervalle $[0,1]$, à valeurs complexes, muni de la norme $||\ ||_\infty$. On se donne un réel α tel que $0 < \alpha < 1$ et on note E_α le sous-espace de E constitué des fonctions f telles qu'il existe une constante $A > 0$ pour laquelle :

$$\forall x \in [0,1],\ \forall y \in [0,1],\ |f(x) - f(y)| \leq A|x-y|^\alpha$$

On munit E_α de la norme :

$$||f||_\alpha = ||f||_\infty + \sup_{0\leq x\neq y\leq 1} \frac{|f(x)-f(y)|}{|x-y|^\alpha}$$

Alors $(E_\alpha, ||\ ||_\alpha)$ est un espace de Banach. Soit F un sous-espace fermé de E. On suppose que F est contenu dans E_α et on se propose de montrer que F est de dimension finie.

1. Montrer que F est fermé dans E_α.

2. Montrer qu'il existe une constante $C > 0$ telle que, pour tout élément f de F, $||f||_\alpha \leq C||f||_\infty$.

3. Conclure en étudiant la boule unité de F.

Exercice 2

Soit $E = L^1(\mathbb{T})$ l'espace des fonctions 2π-périodiques localement intégrables sur R, muni de la norme :

$$||f||_1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} |f(x)|dx$$

Soit $F = c_0(\mathbb{Z})$ l'espace des familles $(x_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes qui tendent vers 0 à l'infini, muni de la norme $||x||_\infty = \sup_{n\in\mathbb{Z}} |x_n|$.
On se propose de montrer que l'application suivante n'est pas surjective :

$$T\ :\ \begin{array}{ccc} E & \rightarrow & F \\ f & \mapsto & (c_n(f))_{n\in\mathbb{Z}},\ c_n(f) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)e^{-inx}dx \end{array}$$

1. Rappeler pourquoi T est bien définie, continue et injective.

2. Montrer que si T est surjective, il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $f \in L^1(\mathbb{T})$,

$$||f||_{L^1} \leq \delta \sup |c_n(f)|$$

3. Pour tout $g \in L^\infty(\mathbb{R})$, 2π-périodique, on choisit une suite $(\alpha_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ de nombres complexes de module 1 telle que, pour tout $n \in \mathbb{Z}$, $\bar{\alpha} c_n(g) = |c_n(f)|$. En appliquant la question 2 à

$$f_N = \sum_{|n|\leq N} \alpha_n e^{inx},$$

montrer que, si T est surjective, pour tout $N \leq 0$,

$$\sum_{|n|\leq N} |c_n(g)| \leq \delta ||g||_\infty$$

4. Conclure.