Université Denis Diderot **2006-2007**
Niveau M2 Maths Fondamentales 1^{er} **semestre**
Module : Analyse Spectrale

Feuille de TD n°3 : Opérateurs autoadjoints, Familles Spectrales

Exercice 1

Soit S l'opérateur symétrique non borné défini sur $L^2(]0,1[)$ par $D(S) = C_0^\infty(]0,1[)$ et $Su = -iu'$ pour $u \in D(S)$.
On se propose de déterminer toutes les extensions autoadjointes de S. On désigne par $H^1(]0,1[)$ l'espace des fonctions $u \in L^2(]0,1[)$ telles que $u' \in L^2(]0,1[)$.

1. Montrer que l'adjoint de S est donné par $D(S^*) = H^1(]0,1[)$ et $S^*u = -iu'$. Pour $u, v \in H^1(]0,1[)$, exprimer, en fonction de $u(0), v(0), u(1), v(1)$, la quantité $(S^*u|v) - (u|S^*v)$.
2. Soit α un nombre complexe. On introduit l'opérateur suivant :

$$D(A_\alpha) = \{u \in H^1(]0,1[),\ u(1) = \alpha u(0)\},\ A_\alpha u = -iu'$$

a. A quelle condition sur α l'opérateur A_α est-il symétrique ? Montrer qu'il est alors autoadjoint. Indication : *on pourra vérifier que la forme linéaire $v \mapsto v(0)$ n'est pas continue pour la norme L^2 sur $D(A_\alpha)$.*
b. On suppose que α est tel que A_α soit autoadjoint. Déterminer les fonctions propres et les valeurs propres de A_α. Que peut-on dire du sous-espace vectoriel engendré par les fonctions propres ? En déduire le spectre de A_α.
3. Soit A une extension symétrique de S.
a. Montrer que $D(A) \subset H^1(]0,1[)$ et établir, pour tout couple (u, v) d'éléments de $D(A)$ l'identité :

$$u(1)\overline{v(1)} = u(0)\overline{v(0)}$$

b. Montrer qu'il existe un nombre complexe α tel que $A \subset A_\alpha$. En déduire toutes les extensions autoadjointes de S.

Exercice 2

Etude du laplacien en une dimension.

On note : $\mathcal{A}_2(]a,b[) = \{h \in C^1(]a,b[),\ h'\ AC\}$. On rappelle que si $g \in L^2(a,b)$ il existe $h \in \mathcal{A}_2(]a,b[)$ telle que : $h''(x) = g(x)$ pour tout $x \in]a,b[$.

Soit $]a,b[$ un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et T_0 l'opérateur défini par :

$$D(T_0) = C_0^\infty(]a,b[),\ \forall f \in D(T_0),\ T_0 f = -f''$$

1. Vérifiez que T_0 est symétrique.
2. Montrez que l'image de T_0, $R(T_0)$, est constituée des éléments $k \in C_0^\infty(]a,b[)$ tels que : $\int_a^b x^j k(x)dx = 0$, pour $j = 0, 1$.
3. Soit T l'opérateur défini par :

$$D(T) = \{f \in \mathcal{A}_2(]a,b[) \cap L^2(]a,b[),\ f'' \in L^2(]a,b[)\}$$

et : $\forall f \in D(T),\ Tf = -f''$. Montrez que : $T_0^* = T$.
4. Si $]a,b[= \mathbb{R}$ montrez que $\overline{T_0} = T$ et que T est autoadjoint. Ainsi T_0 est essentiellement autoadjoint.
5. Si $]a,b[= \mathbb{R}$ montrez que $\sigma(\overline{T_0}) = [0,+\infty[$ et que $\sigma_p(\overline{T_0}) = \emptyset$.
6. On suppose $]a,b[\neq \mathbb{R}$ et borné. Soit T_1 l'opérateur défini par :

$$D(T_1) = \{f \in C^\infty([a,b]),\ f(a) = f(b) = 0\}$$

et : $\forall f \in D(T_1),\ T_1 f = -f''$.
a. Montrez que T_1 est essentiellement autoadjoint.
b. Montrez que : $\sigma(\overline{T_1}) = \sigma_p(\overline{T_1})$. Dans le cas où $]a,b[=]0,2\pi[$, vérifiez que :

$$\sigma(\overline{T_1}) = \{\frac{n^2}{4} \mid n \in \mathbb{N}^*\}$$

Exercice 3

Extrait du partiel 2005-2006.

Soit A un opérateur auto-adjoint dans un espace de Hilbert $\mathcal{H}$. On note $D(A)$ son domaine et $\sigma(A)$ son spectre.

1. On suppose $A \geq 0$ au sens où :

$$\forall \phi \in D(A), (\phi, A\phi) \geq 0$$

a. Soit $x < 0$. Etablir que :

$$\forall \phi \in D(A),\ ||(A-x)\phi||^2 \geq x^2||\phi||^2$$

En déduire que $A - x\ :\ D(A) \to \mathcal{H}$ est injective.
b. Montrer que son image est dense. Pour cela on calculera l'orthogonal de Im A.
c. En déduire que l'application $A - x$ est surjective donc bijective.

On note $R_A(x) = (A-x)^{-1}\ :\ \mathcal{H} \to D(A)$ son application inverse.

d. Majorer $||R_A(x)||$.
e. Etablir l'implication $A \geq 0 \Rightarrow \sigma(A) \subset [0,+\infty)$.

2. Montrer l'implication réciproque à l'aide du théorème spectral.

Exercice 4

Soit T un opérateur autoadjoint agissant sur un espace de Hilbert H et $E: \mathbb{R} \to \mathcal{B}(H)$ la famille spectrale de T.
1. Soit $u : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ une fonction borélienne. Montrez que :

$$s \in \sigma(E(u)) \iff E(u^{-1}(]s-\varepsilon, s+\varepsilon[)) > 0$$

En déduire que $\sigma(E(u)) = u(\sigma(T))$.
2. Montrez que $\sigma_{\text{ess}}(T) = \emptyset$ si et seulement si $(T-z)^{-1}$ est compact pour tout $z \in \mathbb{R} \setminus \sigma(T)$.
3. Soit $u(t) = e^{it}$ et $U = E(u)$. Montrez que U est unitaire.

Exercice 5

Le laplacien discret en dimension un.
Soit Δ l'opérateur définit par : $D(\Delta) = \ell^2(\mathbb{Z})$ et pour toute suite $u \in \ell^2(\mathbb{Z})$:

$$\forall n \in \mathbb{Z},\ (\Delta u)_n = -(u_{n-1} + u_{n+1})$$

1. Montrez que Δ est autoadjoint.
2. Calculez le spectre de Δ. Vérifiez que ce spectre est réduit au spectre essentiel de Δ.
3. Soit φ la fonction définit sur $[0, 2\pi]$ par : $\varphi(x) = -2\cos(x)$. On note M_φ l'opérateur de multiplication par φ. Soit enfin $X(t) = \{x \in [0, 2\pi],\ \varphi(x) \leq t\}$.
On pose pour $f \in L^2([0, 2\pi])$: $E(t)f = \chi_{X(t)}f$. Montrez que $E(t)$ est une famille spectrale et que $E(id) = M_\varphi$.
4. Soit μ_f la mesure associée à f et à $E(t)$. Montrez que pour tout f, μ_f est absolument continue par rapport à la mesure de Lebesgue. Pour cela on montrera que si $f \in C^1([0, 2\pi])$ alors $t \mapsto \mu_f(]-\infty, t])$ est de classe C^1 sur $\mathbb{R} \setminus \{\pm 2\}$.

Qu'en déduit-on pour le spectre de Δ ?

Exercice 6

Version discrète du lemme de Schnoll.

Soit $\ell^2(\mathbb{N})$ l'espace de Hilbert des suites $\phi = (\phi_n)_{n \geq 0}$ de nombres complexes de carré sommable. On considère dans $\ell^2(\mathbb{N})$ l'opérateur de multiplication V par une suite réelle $v = (v_n)_{n \geq 0}$ et l'opérateur de Schrödinger $H = H_0 + V$ défini par :

$$(H\phi)_n = \begin{cases} -\phi_{n+1} - \phi_{n-1} + v_n\phi_n & \text{si } n \geq 1 \\ -\phi_1 + v_0\phi_0 & \text{si } n = 0 \end{cases}$$

Soit $G(z) = (H-z)^{-1}$ la résolvante de H en $z \in \mathbb{C} \setminus \mathbb{R}$ et soit, pour $m, n \in \mathbb{N}$:

$$G_{m,n} = (\delta_m, G(z)\delta_n)$$

où $\delta_m = (\delta_{m,k})_{k \geq 0}$ avec $\delta_{m,k} = 1$ si $k = m$ et $\delta_{m,k} = 0$ si $k \neq m$. Dans toute la suite on suppose que la suite v est bornée.

1. Montrer que H est auto-adjoint borné.
2. Etablir l'estimation suivante de la norme de la résolvante :

$$||G(z)|| \leq \frac{1}{|\text{Im}z|} \tag{1}$$

3. Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on note $\psi(\lambda) = (\psi_n(\lambda))$ la solution de $H\psi = \lambda\psi$, $\psi_0 = 1$. On note $E(\lambda)$ la résolution de l'identité de H. On note $\mathrm{d}\rho(\lambda)$ la mesure spectrale de H définie par :

$$\forall m, n \in \mathbb{N},\ (\delta_m, E(\lambda)\delta_n) = \psi_m(\lambda)\psi_n(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)$$

Exprimer alors $G_{m,n}(z)$ sous la forme d'une intégrale du type $\int_{\mathbb{R}} f(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)$.
4. Etablir que :

$$\text{Im}G_{n,n}(\mathrm{i}) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\psi_n^2(\lambda)}{\lambda^2+1}\mathrm{d}\rho(\lambda) \leq 1 \tag{2}$$

5. Soit $\varepsilon > 0$ et soit :

$$\theta(\lambda) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\psi_n^2(\lambda)}{(\lambda^2+1)(1+n^{\frac{1}{2}+\varepsilon})^2}$$

Etablir que : $\theta(\lambda) < +\infty$ pour ρ-presque tout λ.
Indication : Estimer $\int_{\mathbb{R}} \theta(\lambda)\mathrm{d}\rho(\lambda)$ grâce à (2).
6. Conclure : Etant donné $\varepsilon > 0$, il existe pour ρ-presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$ une constante $C_{\lambda,\varepsilon}$ telle que pour tout $n \geq 0$:

$$|\psi_n(\lambda)| \leq C_{\lambda,\varepsilon}(1+n)^{\frac{1}{2}+\varepsilon}$$

Ainsi chaque fonction propre généralisée $\psi(\lambda)$ est polynomialement bornée en n pour ρ-presque tout $\lambda \in \mathbb{R}$.