

Feuille de TD n°4 : Quelques problèmes d'analyse spectrale

Problème 1

Soit E l'espace de Hilbert des fonctions 2π -périodiques sur $\mathbb{R}$, localement de carré intégrables par rapport à la mesure de Lebesgue, muni du produit scalaire :

$$(u|v) = \int_0^{2\pi} u(x) \overline{v(x)} \frac{dx}{2\pi}$$

et de la norme $\| \cdot \|$ associée. On désigne par $(e_k)_{k \in \mathbb{Z}}$ la base hilbertienne de E donnée par $e_k(x) = e^{ikx}$ et on note pour tout $u \in E$, pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $\hat{u}(k) = (u|e_k)$, les coefficients de Fourier de u . Enfin on désigne par E_1 le sous-espace vectoriel de E constitué des fonctions u telles que $(k\hat{u}(k)) \in \ell^2(\mathbb{Z})$, muni du produit scalaire :

$$(u|v)_1 = \sum_{k \in \mathbb{Z}} (1+k^2) \hat{u}(k) \overline{\hat{v}(k)}$$

et $\| \cdot \|_1$ la norme associée.

1. Montrer que E_1 est un espace de Hilbert.
2. Soit $j : E_1 \rightarrow E$ l'injection canonique et soit P_N le projecteur orthogonal de E sur l'espace vectoriel engendré par la famille $(e_k)_{|k| \leq N}$. Montrer que $P_N j$ converge vers j dans $\mathcal{L}(E_1, E)$ quand N tend vers l'infini et en déduire que l'application j est compacte.
3. Soit ∂ l'opérateur non borné sur E de domaine E_1 défini par

$$\partial u = \sum_{k \in \mathbb{Z}} ik \hat{u}(k) e_k$$

Montrer que $\partial^* = -\partial$. Que vaut ∂u si u est de classe C^1 ?

4. Soit $a : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction mesurable 2π -périodique telle qu'il existe des nombres α, β strictement positifs vérifiant :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \alpha \leq a(x) \leq \beta$$

- a. On définit sur E_1 le produit scalaire :

$$(u|v)_2 = \int_0^{2\pi} a(x) \partial u(x) \overline{\partial v(x)} \frac{dx}{2\pi} + \int_0^{2\pi} u(x) \overline{v(x)} \frac{dx}{2\pi}$$

et la norme $\| \cdot \|_2$ associée. Montrer que les normes $\| \cdot \|_1$ et $\| \cdot \|_2$ sont équivalentes.

- b. On définit sur E l'opérateur A par

$$D(A) = \{u \in E_1 \mid a\partial u \in E_1\}, \quad Au = -\partial(a\partial u)$$

Montrer que $A + 1$ est bijectif. En déduire que A est autoadjoint.

- c. Montrer que l'application $(A + 1)^{-1} : E \rightarrow E_1$ est continue. En déduire qu'il existe une base hilbertienne $(\varphi_n)_{n \geq 1}$ de E vérifiant $\varphi_n \in D(A)$ et $A\varphi_n = \lambda_n \varphi_n$ où

$(\lambda_n)_{n \geq 1}$ est une suite croissante de réels positifs ou nuls tendant vers $+\infty$. Que vaut λ_1 ? Déterminer la suite (λ_n) dans le cas particulier où la fonction a est constante.

- d. Montrer que les $\psi_n = (1 + \lambda_n)^{-\frac{1}{2}} \varphi_n$ forment une base hilbertienne de E_1 pour le produit scalaire $(\cdot | \cdot)_2$. En déduire que

$$(a\partial u | \partial u) = \sum_{n=1}^{+\infty} \lambda_n |(u | \varphi_n)|^2$$

pour tout $u \in E_1$ puis pour tout $n \geq 1$:

$$\lambda_n = \min_{F \in \mathcal{F}_n} \lambda(F)$$

avec $\lambda_F = \sup\{(a\partial u | \partial u) \mid u \in F, \|u\| = 1\}$ et $\mathcal{F}_n$ désignant l'ensemble des sous-espaces de dimension n de E_1 .

- e. Montrer que pour tout $p \geq 1$

$$\alpha p^2 \leq \lambda_{2p} \leq \lambda_{2p+1} \leq \beta p^2$$

Problème 2

1. Soit A un opérateur autoadjoint non borné sur un espace de Hilbert E . On se propose de montrer qu'un nombre réel λ appartient au spectre de A si et seulement s'il vérifie la propriété suivante notée $(\mathcal{P}_\lambda)$: il existe une suite (u_n) de $D(A)$ telle que $\|u_n\| = 1$ et $\|(A - \lambda)u_n\| \rightarrow 0$.

- a. Montrer que si $(\mathcal{P}_\lambda)$ est vérifiée, λ appartient au spectre de A .

- b. Soit λ tel que $(\mathcal{P}_\lambda)$ ne soit pas vérifiée. Montrer qu'il existe $c > 0$ tel que pour tout $u \in D(A)$, $\|(A - \lambda)u\| \geq c\|u\|$. En déduire que l'image de $A - \lambda$ est dense dans E puis montrer qu'elle est fermée. Conclure.

2. On note $E = L^2(\mathbb{R}^d)$ et on se donne $V : \mathbb{R}^d \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable bornée. On considère l'opérateur A_0 de domaine $C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ défini par $A_0 u = -\Delta u + V u$ pour tout $u \in D(A_0)$.

- a. Montrer que A_0 est essentiellement autoadjoint.

- b. On note $A = \overline{A_0}$ et on suppose qu'il existe une suite (x_n) de points de $\mathbb{R}^d$ tendant vers l'infini, et une suite (r_n) de nombres positifs tendant vers l'infini, telles que :

$$\sup_{|x - x_n| \leq r_n} |V(x)| \rightarrow 0$$

Soit $\chi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$ à support dans la boule unité telle que $\|\chi\|_{L^2} = 1$. Pour tout $\xi \in \mathbb{R}^d$, on pose

$$u_n(x) = r_n^{-\frac{d}{2}} e^{ix \cdot \xi} \chi\left(\frac{x - x_n}{r_n}\right)$$

Calculer $(A - |\xi|^2)u_n$. En déduire que $[0, +\infty[\subset \sigma(A)$.

Problème 3

Soit K une fonction continue sur $[0, 1] \times [0, 1]$ à valeurs complexes. On désigne par T_K l'élément de $\mathcal{L}(L^2([0, 1], dx))$ défini par :

$$T_K f(x) = \int_0^1 K(x, y) f(y) dy$$

On suppose que l'opérateur T_K est autoadjoint et positif i.e $(T_K f | f) \geq 0$ pour tout $f \in L^2([0, 1])$.

1. Montrer que pour tout intervalle I contenu dans $[0, 1]$, on a

$$\int_I \int_I K(x, y) dx dy \in \mathbb{R}_+$$

En déduire que, pour tout $x \in [0, 1]$, $K(x, x) \in \mathbb{R}_+$.

2. Soit (λ_n) la suite des valeurs propres non nulles de T_K répétées selon leur multiplicité et soit (φ_n) une base hilbertienne de l'orthogonal de $\ker(T_K)$ vérifiant pour tout n :

$$T_K \varphi_n = \lambda_n \varphi_n$$

On a donc pour tout $f \in L^2([0, 1])$ l'identité

$$T_K f = \sum_n \lambda_n (f | \varphi_n) \varphi_n$$

la convergence de la série ayant lieu dans $L^2([0, 1])$.

a. Vérifier que chaque φ_n est continue.

b. En appliquant la question 1 à un noyau K_N convenable, montrer que pour tout N et tout $x \in [0, 1]$,

$$K(x, x) \geq \sum_{n \leq N} \lambda_n |\varphi_n(x)|^2$$

3. a. Montrer que la série de terme général λ_n converge.

b. Montrer que la série de terme général $\lambda_n (f | \varphi_n) \varphi_n$ converge uniformément pour $x \in [0, 1]$. Quelle est sa somme ?

c. Montrer que pour tout $x \in [0, 1]$, la série de terme général $\lambda_n \varphi_n(x) \overline{\varphi_n(y)}$ converge uniformément en $y \in [0, 1]$. Quelle est sa somme ?

d. Exprimer la somme des λ_n en fonction de K .