Institut Galilée **2009-2010**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 1 : Espaces fonctionnels

Exercice 1

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y \end{array}.$$

1. Montrer que si f est continue à support compact, Tf est continue.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 2

Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite bornée de fonctions de $L^p(\mathbb{R})$, pour $1 \leq p \leq +\infty$. On suppose que $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge presque partout vers une fonction f.

1. Montrer que $f \in L^p(\mathbb{R})$. On pourra utiliser pour cela le lemme de Fatou.

2. A-t-on nécessairement $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ qui converge vers f dans $L^p(\mathbb{R})$? *Indication : penser à la suite de fonctions* $(\mathbf{1}_{[n,n+1[})_{n\in\mathbb{N}}$.

3. Si $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers g dans $L^p(\mathbb{R})$, quelle relation y a-t-il entre f et g ?

Exercice 3

Soient $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et μ une mesure finie sur $(K, \mathcal{B}(K))$.
Montrer que l'ensemble des fonctions polynomiales à plusieurs variables est dense dans $L^p(\mu)$ pour $1 \leq p < +\infty$.

Exercice 4

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. On suppose que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I), \ \int_I f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Soit $[a,b] \subset I$ un intervalle.

1. En utilisant un argument de densité, montrer que :

$$\forall g \in C_0(I), \ \mathrm{supp}\ g \subset [a,b], \ \int_{[a,b]} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. Soient $\varepsilon > 0$ et $h_\varepsilon \in C_0(]a,b[)$ telle que

$$\int_{[a,b]} |f(x) - h_\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Montrer que :

$$\forall g \in C_0(]a,b[), \ \left| \int_{[a,b]} h_\varepsilon(x)g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon ||g||_\infty.$$

3. En choisissant bien $g \in C_0(]a,b[)$, montrer que $\int_{[a,b]} |h_\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$.

4. En déduire que $f = 0$ presque partout sur I.

Exercice 5 - *Théorème de Borel*

Difficile.

Soient $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de nombres complexes et $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est une suite de réels strictement positifs. Soit $\varphi : \mathbb{R} \to [0,1]$ une fonction de classe C^∞ telle que $\varphi(x) = 1$ pour $x \in [-1,1]$ et supp $\varphi \subset [-2,2]$. On introduit enfin la suite de fonctions $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ où chaque $f_n : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f_n(x) = c_n \varphi(t_n x) \frac{x^n}{n!}.$$

1. Pour tout $k \in \mathbb{N}$, donner l'expression de la dérivée k-ième $f_n^{(k)}$.

2. On pose, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$,

$$A_n = \max_{k=0,\ldots,n} \sup_{x\in\mathbb{R}} |\varphi^{(k)}(x)|.$$

Pour $x \in \mathbb{R}$ et $k \in \mathbb{N}$, majorer $|f_n^{(k)}(x)|$ en fonction de A_n, $|c_n|$ et t_n.

3. Déterminer une suite $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de réels strictement positifs telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$ et tout $k \in \mathbb{N}$, $|f_n^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^n}$.

4. Pour ce choix de $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$, on considère la fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ définie par :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \ f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n(x).$$

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, calculer $f^{(k)}(0)$. Conclure.

5. *Application :* montrer que toute fonction de classe C^∞ sur $[0,+\infty[$ se prolonge en une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$.