Institut Galilée **2009-2010**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples et ordre.

Exercice 1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\ \mathrm{d}x, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2}\ \mathrm{d}x.$$

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \log(x)\ \mathrm{d}x.$$

2. Soit φ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.
a. Minorer $< T, \varphi_n >$.
b. En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.

Exercice 3

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$ telle que $T_f = \delta_{x_0}$.
Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 4 de la Feuille 1.

Exercice 4 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
1. Montrer qu'il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
2. Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\ \mathrm{d}x$$

existe.
3. Montrer que cette expression définit une distribution d'ordre au plus 1, appelée *valeur principale de* $\frac{1}{x}$ et notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
4. En considérant ϕ_n comme à l'exercice 2, montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre exactement 1.

Exercice 5

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
1. Montrer que les limites

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\ \mathrm{d}x \right) \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\ \mathrm{d}x \right)$$

existent.
2. En déduire que l'expression

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\ \mathrm{d}x$$

définit une distribution T dont on identifiera la partie réelle et la partie imaginaire. Donner l'ordre de T.

Exercice 6

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$< T, \varphi >= \int_0^\infty \left(\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t) \right)\ \mathrm{d}t.$$

Exercice 7 - Distribution d'ordre infini

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression

$$< T, \varphi >= \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre infini.

Exercice 8 - Partie finie de x^α

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
1. Pour $\alpha \in]-2, -1[$, montrer que :

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\ \mathrm{d}x = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$

où $A_\varphi \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε et où R_ε tend vers une limite lorsque ε tend vers 0^+.
2. On pose : $< \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} R_\varepsilon$. Montrer que $\mathrm{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.