

## Feuille de TD 3 : Distributions - Support et opérations

### Exercice 1

Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ . Déterminer le support des distributions définies par les expressions suivantes :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx, \quad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2} dx, \quad \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx.$$

### Exercice 2

Soit  $T$  une distribution sur  $\mathbb{R}^n$  et  $f$  une fonction de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}^n$ , à valeurs dans  $\mathbb{R}$ .

1. Montrer que si  $fT = 0$ , alors le support de  $T$  est inclus dans l'ensemble  $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}$ .
2. On suppose de plus que  $T$  est d'ordre 0. Montrer qu'alors la réciproque est vraie : si le support de  $T$  est inclus dans l'ensemble  $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n, f(x) = 0\}$  alors  $fT = 0$ .
3. En prenant  $T = \delta'$ , montrer que la réciproque est fautive en général si  $T$  n'est pas d'ordre 0.
4. Caractériser les fonctions  $f$  de classe  $C^\infty$  sur  $\mathbb{R}$  telles que  $f\delta' = 0$ .

### Exercice 3

1. Montrer que  $xvp\left(\frac{1}{x}\right) = 1$ .
2. Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$  telle que  $xT = 0$ .
  - a. Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  telle que  $\varphi(0) \neq 0$ . Démontrer qu'il existe une constante  $C_\varphi$  telle que, pour toute fonction  $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  égale à 1 sur le support de  $\varphi$ ,  $C_\varphi = \langle T, \phi \rangle$ .
  - b. Montrer que si  $\varphi$  et  $\tilde{\varphi}$  sont deux fonctions dans  $C_0^\infty(\mathbb{R})$  telles que  $\varphi(0) \neq 0$  et  $\tilde{\varphi}(0) \neq 0$ , alors  $C_\varphi = C_{\tilde{\varphi}}$ .
  - c. En déduire toutes les solutions de l'équation  $xT = 0$ .
3. Résoudre l'équation  $xT = 1$ .
4. Soit  $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . Montrer que  $(\sin x)T = 0$  si et seulement s'il existe une suite  $(c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$  de nombres complexes telle que,

$$T = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \delta_{n\pi}.$$

### Exercice 4

Soit  $H$  la fonction indicatrice de  $\mathbb{R}_+$ .

1. a. Montrer que  $H' = \delta_0$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
- b. Montrer que  $(\log|x|)' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$  dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ .
- c. Montrer que, dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ ,

$$vp\left(\frac{1}{x}\right)' = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left( \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2} dx - \frac{2\varphi(0)}{\varepsilon} \right) = \text{Pf}\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. Soit  $m \in \mathbb{N}$ . Calculer les dérivées successives dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  de la fonction  $x \mapsto \frac{x^m}{m!} H(x)$ .

### Exercice 5

On note, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $T_n$  la distribution associée à la fonction localement intégrable  $t \mapsto \frac{\sin(nt)}{\pi t}$ . Montrer que la suite  $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vers la distribution  $\delta_0$ . *Indication : on pourra se servir de l'identité  $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$ .*

### Exercice 6

Montrer que la suite de distributions  $(T_n)_{n \geq 1}$  définie par :

$$\forall n \geq 1, T_n = n(\delta_{\frac{1}{n}} - \delta_{-\frac{1}{n}}),$$

converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ . L'ordre de la limite d'une suite de distributions d'ordre  $m$  est-il toujours  $m$  ?

### Exercice 7

Calculer les limites, dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ , des suites de distributions suivantes :

$$A_n = \sin(nx), \quad B_n = ng(n\pi) \text{ où } g \in L^1(\mathbb{R}),$$

$$C_n = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \delta_{\frac{p}{n}}, \quad D_n = e^{inx} vp\left(\frac{1}{x}\right).$$

### Exercice 8

Soit  $N \in \mathbb{N}$ . On pose :

$$F_N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C} \\ t \mapsto \frac{1}{2\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikt} \in L_{\text{loc}}^1(\mathbb{R}).$$

On note  $T_N$  la distribution associée à  $F_N$ .

1. Montrer que, pour tout  $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$ ,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}}.$$

2. Soit  $M \in \mathbb{N}$ . Soit  $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$  dont le support est inclus dans  $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$ . Montrer que :

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{(2N+1)t}{2}\right)}{\sin\frac{t}{2}} \varphi(t) dt,$$

où, pour tout  $t \in \mathbb{R}$ ,  $\phi(t) = \sum_{k=-M}^M \varphi(t + 2k\pi)$ .

3. En écrivant  $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$  où  $\psi$  est de classe  $C^\infty$ , montrer que la suite  $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$  converge dans  $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$  vers la distribution  $\sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta_{2n\pi}$ .