Institut Galilée **2009-2010**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

Feuille de TD 4 : Convolution - Équations différentielles et équations aux dérivées partielles.

Exercice 1 - Sur la convolution

1. Calculer $\delta_0' \star \delta_0'$ pour $\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

2. Soient $a, b \in \mathbb{R}$. Calculer $\delta_a' \otimes \delta_b'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

3. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Montrer qu'il existe une distribution $E \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ à support compact telle que $E \star T = T^{(k)}$.

4. Soient T et S dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, S étant supposée à support compact. Pour $n \in \mathbb{N}$, on désigne par X^n la fonction de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, $x \mapsto x^n$. Démontrer la formule suivante :

$$X^n(T \star S) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (X^k T) \star (X^{n-k} S).$$

Exercice 2

1. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Calculer $(xT)'$.

2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$xT' + T = 0.$$

Exercice 3

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.

a. Calculer T_1 et T_2.

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.

d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.

2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

3. En déduire une solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle : $2xT' - T = f$, où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est à support compact.

Exercice 4

Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ < T, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, -x)\, \mathrm{d}x.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?

2. Déterminer le support de T.

3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.

4. Calculer, au sens des distributions, $(\partial_x - \partial_y)T$.

Exercice 5

On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{si} \quad t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} \quad t - |x| \leq 0 \end{cases}.$$

1. Calculer $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

2. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f,$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.

3. Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, que peut-on dire de u ?

Exercice 6 - Équation de Laplace

Soit $d \geq 1$. On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par la fonction localement intégrable :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d,\ E(x) = \begin{cases} x_+ = \max(x,0) & \text{si} \quad d = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \log|x| & \text{si} \quad d = 2 \\ -\frac{1}{(d-2)\sigma(S^{d-1})} \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si} \quad d \geq 3 \end{cases},$$

où $\sigma(S^{d-1})$ désigne l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. Pour $d = 1$, vérifier que $E'' = \delta_0$.

2. On suppose dans la suite $d \geq 2$. Soit $f\ \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $F \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, F(x) = f(|x|)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ \Delta F(x) = f''(|x|) + \frac{d-1}{|x|} f'(|x|).$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) = 0.$$

4. Soit $F : \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction localement intégrable donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\},\ F(x) = \left\{ \begin{array}{lll} \log|x| & \text{si} & d=2 \\ \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si} & d \geq 3 \end{array} \right. .$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit Ω_ε l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus B(0,\varepsilon)$. Soit enfin $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En appliquant la formule de Green à F et φ sur l'ouvert Ω_ε puis en faisant tendre ε vers 0, calculer $< \Delta F, \varphi >$.

5. En déduire que $\Delta E = \delta_0$, pour tout $d \geq 2$.

6. On admet le théorème de Liouville (version faible) : *Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ telle que $\Delta u = 0$. Si $u(x)$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini alors u est nulle.*

a. Soit $\rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ une distribution à support compact. Montrer que l'équation $-\Delta V = \rho$ admet une unique solution qui tend vers 0 à l'infini.

b. Calculer l'expression de cette solution pour $\rho = \delta_0$ (charge unique à l'origine) et pour $\rho = \delta'_{x_0}$ avec $x_0 \neq 0$ (cas du dipôle).

Exercice 7 - Équation de la chaleur

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+^*$). On considère sur $\mathbb{R}^2$ la fonction donnée par :

$$\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Montrer que E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \partial^2_{xx} \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right).$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On pose :

$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_t \varphi(x,t) \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x,$$

et

$$J_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}} \int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial^2_{xx} \varphi(x,t) \,\mathrm{d}t\mathrm{d}x.$$

a. Calculer $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.

b. En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, déterminer la limite lorsque ε tend vers 0 de $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.

Indication : on pourra utiliser que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4}} \,\mathrm{d}u = \sqrt{4\pi}$.

4. Calculer $(\partial_t - \partial^2_{xx})E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

5. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_t u - \partial^2_{xx} u = f,$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.

6. Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, que peut-on dire de u ?

Exercice 8 - Équation de Cauchy-Riemann

On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction donnée par :

$$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\},\ f(x,y) = (x + \mathrm{i}y)^{-1}.$$

1. Montrer que $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^2)$.

2. Soit $\bar{\partial}$ l'opérateur de Cauchy-Riemann définit par : $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + \mathrm{i}\partial_y)$. Calculer $\bar{\partial} f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.