

Exercice 2:

1. [Lemme de Fatou: Soit (f_n) suite de fonctions $X \rightarrow [0, +\infty]$ mesurables
alors: $\int_X (\liminf f_n) \leq \liminf \left(\int_X f_n \right)$

On a: $M > 0$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|f_n\|_p \leq M$.

$$\begin{aligned} \text{Alors: } \int_{\mathbb{R}} |f|^p d\mu &= \int_{\mathbb{R}} \liminf |f_n|^p d\mu \\ &\leq \liminf \int_{\mathbb{R}} |f_n|^p d\mu \\ &\leq \liminf \|f_n\|_p^p \\ &\leq M^p. \end{aligned}$$

Donc $\|f\|_p \leq M$ et $f \in L^p(\mathbb{R})$.

2. Si $f_n = \chi_{[n, n+1]}$, alors $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers 0. Or:
 $\forall n, \|f_n - 0\|_p = \|f_n\|_p = 1$ Donc (f_n) ne cv pas vers 0 dans $L^p(\mathbb{R})$.

3. Comme $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ cv vers g dans $L^p(\mathbb{R})$, il existe une sous-suite $(f_{n_k})_{k \in \mathbb{N}}$ qui cv pp vers g sur $\mathbb{R}$. Or, comme (f_n) cv pp vers f sur $\mathbb{R}$, alors (f_{n_k}) cv aussi pp vers f sur $\mathbb{R}$ et donc:
 $f = g$ pp.

Exercice 3:

Soit $f \in C^p(\mu)$ et $\varepsilon > 0$. Il existe une fonction continue g sur K telle que $\|f - g\|_p \leq \varepsilon$. Puis par Stone-Weierstraß, il existe P fort^o polynôme telle que: $\forall x \in K, |g(x) - P(x)| \leq \varepsilon$.

$$\text{Alors: } \|g - P\|_p = \left(\int_K |g - P|^p d\mu \right)^{1/p} \leq \left(\int_K \varepsilon^p d\mu \right)^{1/p} = \varepsilon \mu(K)^{1/p}$$

$$\text{D'où: } \|f - P\|_p \leq \|f - g\|_p + \|g - P\|_p \leq \varepsilon (1 + \mu(K)^{1/p}).$$

Exercice 4

1. Soit $g \in C_0(I)$, $\text{supp } g \subset [a, b]$. Alors, il existe une suite $(\varphi_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $\varphi_n \in C_0^\infty(I)$ avec $\text{supp } \varphi_n \subset [a', b'] \subset I$ et $[a, b] \subset [a', b']$ tq (φ_n) cvv vers g sur $[a, b]$.

$$\text{Alors: } \left| \int_I f(x) (g(x) - \varphi_n(x)) dx \right| \leq \underbrace{\int_{a'}^{b'} |f(x)| dx}_{< \infty \text{ car } f \in L^1_{loc}(I)} \|g - \varphi_n\|_\infty$$

$\xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0$

$$\text{Or } \int_I f(x) \varphi_n(x) dx = 0 \text{ par hyp.}$$

$$\text{Donc: } \int_I f(x) g(x) dx = 0 \quad (= \int_I f(x) (g(x) - \varphi_n(x) + \varphi_n(x)) dx)$$

2. comme $f \in L^1([a, b])$, pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $h_\varepsilon \in C_0([a, b])$ telle que $|f(x) - h_\varepsilon(x)| \leq \varepsilon$. Soit $g \in C_0([a, b])$.

$$\text{Alors: } \int_a^b h_\varepsilon(x) g(x) dx = \int_a^b (h_\varepsilon(x) - f(x)) g(x) dx + \underbrace{\int_a^b f(x) g(x) dx}_0$$

$$\text{D'où: } \left| \int_a^b h_\varepsilon(x) g(x) dx \right| \leq \int_a^b |h_\varepsilon(x) - f(x)| |g(x)| dx \leq \varepsilon \|g\|_\infty$$

par 1.

3. On teste cette inégalité sur $g = \frac{h_\varepsilon}{\delta + |h_\varepsilon|}$ avec $\delta > 0$ pour que g soit C .

$$\text{Alors: } \|g\|_\infty \leq 1 \text{ et}$$

$$\int_a^b \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx \leq \varepsilon.$$

De là, par le théorème de cv dominée; en faisant tendre δ vers 0:

$$\int_a^b |h_\varepsilon(x)| dx \leq \varepsilon.$$

4.

$$\text{Il vient: } \int_a^b |f(x)| dx = \int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x)| dx \leq \int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x)| dx + \int_a^b |h_\varepsilon(x)| dx \leq 2\varepsilon$$

$$\text{Donc: } \int_a^b |f(x)| dx = 0 \text{ et comme cela est valable pour tout } [a, b] \subset I, \quad f = 0 \text{ pp sur } I.$$

Exercice 5:

1. Pour $k \leq m$ et $x \in \mathbb{R}$, pour la formule de Leibnitz:

$$f_m^{(k)}(x) = \frac{c_m}{m!} \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{d^{k-p}}{dx^{k-p}} (\phi(t_m x)) \frac{d^p}{dx^p} (x^m)$$

En particulier, si $|t_m x| \geq 2$, $f_m^{(k)}(x) = 0$.

On peut donc supposer que $|t_m x| < 2$
 i.e. $|x| < \frac{2}{|t_m|}$.

$$= \frac{c_m}{m!} \sum_{p=0}^k C_k^p t_m^{k-p} \phi^{(k-p)}(t_m x) p! x^{m-p}$$

$$= c_m \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{x^{m-p}}{(m-p)!} t_m^{k-p} \phi^{(k-p)}(t_m x)$$

Et pour $k \geq m+1$: $f_m^{(k)}(x) = \frac{c_m}{m!} \sum_{p=0}^m C_m^p \frac{x^{m-p}}{(m-p)!} t_m^{k-p} \phi^{(k-p)}(t_m x)$

2. Pour $k \in \mathbb{N}$ et $x \in \mathbb{R}$, $|x| < \frac{2}{|t_m|}$ et $k \leq m$.

$$|f_m^{(k)}(x)| \leq |c_m| \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{2^{m-p}}{(m-p)!} \frac{1}{t_m^{m-p}} |\phi^{(k-p)}(t_m x)|$$

$$= |c_m| \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{2^{m-p}}{(m-p)!} \frac{1}{t_m^{m-k}} |\phi^{(k-p)}(t_m x)|$$

$$\leq \frac{|c_m|}{t_m^{m-k}} A_m \sum_{p=0}^k C_k^p \frac{2^{m-p}}{(m-p)!} \leq \frac{|c_m|}{t_m^{m-k}} A_m \left(\sum_{p=0}^m C_m^p \frac{2^{m-p}}{(m-p)!} \right)$$

(car $m \geq k$ et $C_m^p \geq C_k^p$ si $m \geq k$) M_m

5. Soit $f \in C^\infty$ sur $[0, +\infty[$

Soit $c_n = f^{(n)}(0)$ pour

tout $n \in \mathbb{N}$. Soit $g \in C^\infty$

sur $\mathbb{R}$ telle que:

$$\forall n \in \mathbb{N}, g^{(n)}(0) = c_n = f^{(n)}(0)$$

Donc on peut considérer

$$h \text{ tq } h|_{]-\alpha, 0]} = g|_{]-\alpha, 0]}$$

$$\text{et } h|_{[0, +\infty[} = f.$$

Alors h prolonge f

en une fonction de classe

C^∞ sur $\mathbb{R}$.

3. On a:

$$(x) \quad \frac{|c_m|}{t_m^{m-k}} A_m M_m \leq \frac{1}{2^m} \Rightarrow |f_m^{(k)}(x)| \leq \frac{1}{2^m}$$

Si $t_m > 1$, il suffit de prendre $t_m = |c_m| M_m A_m 2^m + 1$ pour avoir (x).

4. Comme les séries $\sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n$ CUV sur $\mathbb{R}$ vers f , on a:

$$f^{(k)}(x) = \sum_{n \geq 0} \frac{f^{(n)}(x)}{n!} x^n = \sum_{n \geq 0} c_n \left(\sum_{p=0}^k C_k^p \frac{x^{n-p}}{(n-p)!} t_m^{k-p} \phi^{(k-p)}(t_m x) \right)$$

$$\text{En } x=0: f^{(k)}(0) = \sum_{n \geq 0} c_n \left(\sum_{p=0}^k C_k^p t_m^{k-p} \times 1 \times \frac{0^{n-p}}{(n-p)!} \right)$$

$$= c_k \quad (n=k, p=k \text{ est le seul terme non nul})$$

Donc, pour toute suite $(c_n)_{n \in \mathbb{N}} \in \mathbb{C}^\mathbb{N}$, il existe une fonction $f \in C^\infty$ sur $\mathbb{R}$ telle que $f^{(n)}(0) = c_n$.