

Exercice 1:

- Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. On suppose que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Alors:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx \right| = \left| \int_a^b \varphi(x) dx \right| \leq \int_{x^2 \in [a, b]} |\varphi(x^2)| dx$$

$$y = x^2 \quad dy = 2x dx = 2\sqrt{y} dy \\ dx = \frac{dy}{2\sqrt{y}}$$

$$\leq \sup_{x \in \mathbb{R}} |\varphi(x)| \int_{x^2 \in [a, b]} dx = \|\varphi\|_{\infty} \int_a^b \frac{dy}{2\sqrt{y}} \\ \leq \|\varphi\|_{\infty} (\sqrt{b} - \sqrt{a}) = \|\varphi\|_{\infty} \left[\sqrt{y} \right]_a^b = \sqrt{b} - \sqrt{a}$$

Donc T définie par $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) dx$ est d'ordre 0.

- Soit T définie par $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx$. Alors T est linéaire sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$.
Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$.

$$\text{Alors: } \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx \right| = \left| \left[\varphi(x) e^{x^2} \right]_a^b - \int_a^b \varphi(x) 2x e^{x^2} dx \right| \\ \leq \int_a^b |\varphi(x)| |2x| e^{x^2} dx \leq \|\varphi\|_{\infty} \int_a^b 2x e^{x^2} dx \\ = \|\varphi\|_{\infty} (e^{b^2} - e^{a^2})$$

Donc T est une distribution d'ordre 0.

Exercice 2:

1.

Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Alors,

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) \log x dx \right| = \left| \int_{[a, b] \cap \mathbb{R}^+} \varphi'(x) \log x dx \right| \\ \leq \|\varphi'\|_{\infty} \left| \int_{[a, b] \cap \mathbb{R}^+} \log x dx \right|$$

C'est car $\log x$ intégrable en 0 ($\leq \frac{1}{\sqrt{x}}$)

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

2. a. on a: $|\langle T, \varphi_n \rangle| = \left| \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi'_n(x) \log x dx \right| = \left| \left[\varphi_n(x) \log x \right]_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} - \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \varphi_n(x) \frac{1}{x} dx \right|$

$$\geq \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2n}}^{\frac{1}{2n}} \frac{dx}{x} = \log n$$

Donc: $\forall n \geq 1, |\langle T, \varphi_n \rangle| \geq \log n$.

2.b. On, $\|q_m\|_\infty = 1$. Donc avec $[a,b] = [0,2]$, il existe $[a,b] \subset \mathbb{R}$, $\forall \varepsilon > 0, \forall m \in \mathbb{N}, \exists q_m \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } q_m \subset [0,2], |\langle T, q_m \rangle| \geq C \|q_m\|_\infty = C$.
 car $\log m \xrightarrow{n \rightarrow \infty} +\infty$. Donc T n'est pas d'ordre 0. Elle est donc d'ordre 1.

Exercice 3:

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ tq $T_f = \delta_{x_0}$.

Alors: $\forall q \in C_0^\infty(I), \int_I f(x) q(x) dx = q(x_0)$. (*)

Alors: $\forall q \in C_0^\infty(I), x_0 \notin \text{supp } q, \int_I f(x) q(x) dx = 0$.

Soit $J = I \cap \{x < x_0\}$ et $\text{supp } q \subset J$.

Alors $\int_J f q = 0$ et $f = 0$ sur J par Exo 4 Feuille 1.

De même, $f = 0$ pp sur $J' = I \cap \{x > x_0\}$. Donc comme

$I = J \cup \{x_0\} \cup J'$, $f = 0$ pp sur I et $\int_I f(x) q(x) dx = 0$,
 choisissons donc q tq $q(x_0) = 1$. Alors $\forall q \in C_0^\infty(I)$.

$\int_I f(x) q(x) dx \neq q(x_0)$, ce qui contredit (*).

Exercice 4:

1. Par Taylor avec reste intégrale à l'ordre 1:

$$\forall x \in \mathbb{R}, q(x) = q(0) + x \int_0^1 q'(xu) du$$

Posons $\psi(x) = \int_0^1 q'(xu) du$. Alors $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ par thm de dérivation sous le signe $\int$.

ou encore:
 $q(x) = q(0) + \int_0^x q'(t) dt$
 puis $xu = t \Rightarrow x \int_0^1 q'(xu) du$.

2. On a, pour tout $\varepsilon > 0$, (Soit $q \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \text{supp } q \subset [-a, a]$).

$$\begin{aligned} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{q(x)}{x} dx &= \int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{q(x)}{x} dx = \int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{q(0)}{x} + \psi(x) dx \\ &= \int_{a > |x| > \varepsilon} \frac{q(0)}{x} dx + \int_{a > |x| > \varepsilon} \psi(x) dx \quad (\text{car } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})) \\ &\quad \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{a > |x| < a} \psi(x) dx \end{aligned}$$

= 0 car impaire

3. On a, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$,

$$\begin{aligned} \left\langle \varphi\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle &= \left| \int_{-a}^a \varphi(x) dx \right| = \left| \int_{-a}^a \left(\int_0^1 \varphi'(xu) du \right) dx \right| \\ &\leq \|\varphi'\|_\infty \left| \int_{-a}^a \left(\int_0^1 du \right) dx \right| = 2a \|\varphi'\|_\infty. \end{aligned}$$

Donc $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

4. Comme à l'exercice 2, pour $\varepsilon > 0$ et n fixé :

$$\int_{\varepsilon}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{2n}}^2 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx \gg \int_{\frac{1}{n}}^1 \frac{\varphi_n(x)}{x} dx = \log n.$$

Comme $\left| \langle \varphi\left(\frac{1}{x}\right), \varphi_n \rangle \right| \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} +\infty$ et $\|\varphi_n\|_\infty = 1 \quad \forall n \geq 1$, $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ n'est pas d'ordre 0. $\varphi\left(\frac{1}{x}\right)$ est donc d'ordre 1.

Exercice 5:

1. Pour $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ on a :

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(x + i\varepsilon)\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx.$$

Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

$$\text{Alors : } \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) = \int_{-a}^a \frac{x\varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

Comme à la question 1. de l'exo 4, on écrit : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$

avec $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\text{supp } \psi \subset [-a, a]$.

$$\begin{aligned} \text{Alors : } \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) &= \int_{-a}^a \frac{x\varphi(0)}{x^2 + \varepsilon^2} dx + \int_{-a}^a \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx \\ &= 0 \text{ car 1^{re} intégrale} \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathbf{1}_{[-a, a]}(x) dx. \end{aligned}$$

$$\text{On : } \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi(x) \text{ et } \forall \varepsilon > 0, \left| \frac{x^2\psi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} \mathbf{1}_{[-a, a]}(x) \right| \leq |\psi(x)| \mathbf{1}_{[-a, a]}(x)$$

$$\text{Donc par le TCD : } \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - i\varepsilon} dx \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \psi(x) dx = \left\langle \varphi\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle \in \mathbb{R}$$

Donc la limite existe et vaut : $\left\langle \varphi\left(\frac{1}{x}\right), \varphi \right\rangle$.

Puis, pour tout $\varepsilon > 0$, on a :

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon \varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varepsilon \varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

Si on pose $y = \frac{x}{\varepsilon}$, $\varepsilon dy = dx$ et :

$$\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} \frac{\varepsilon \varphi(\varepsilon y)}{(\varepsilon y)^2 + \varepsilon^2} \varepsilon dy = \int_{-1}^1 \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} dy = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(y) dy$$

Or : $\forall \varepsilon > 0$, $\left| \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(y) \right| \leq \frac{C \cdot \mathbb{1}_{\mathbb{R}}(y)}{1+y^2}$ intégrable sur $\mathbb{R}$ et ind. de ε .

Où : $\forall y \in \mathbb{R}$, $\frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-\varepsilon, \varepsilon]}(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}$

Pon le TCD, $\operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1+y^2} dy = \pi \varphi(0) = \pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$

Donc la limite existe et vaut $\pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$.

2. On en déduit que l'expression $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx$ est bien définie et vaut :

$$\langle T, \varphi \rangle = \left\langle \operatorname{vp} \left(\frac{1}{x} \right), \varphi \right\rangle + i\pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$$

Soit encore $T = \operatorname{vp} \left(\frac{1}{x} \right) + i\pi \delta_0$ qui est bien une distribution d'ordre 1 (car $\operatorname{vp} \left(\frac{1}{x} \right)$ est d'ordre 1).

Exercice 6:

Soit $[a, a]^2 \subset \mathbb{R}^2$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset [a, a]^2$

Alors :

$$\begin{aligned} \int_0^{+\infty} \left(\varphi \left(\frac{1}{t^2}, \sin t \right) - \varphi(0, \sin t) \right) dt &= \int_0^{+\infty} \int_0^1 2x \varphi \left(\frac{s}{t^2}, \sin t \right) \frac{ds}{t^2} dt \\ &\leq \int_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{+\infty} \int_0^1 2x \varphi \left(\frac{s}{t^2}, \sin t \right) \frac{ds}{t^2} dt = \left[\varphi \left(\frac{s}{t^2}, \sin t \right) \right]_0^1 \\ &\leq \|2x \varphi\|_\infty \int_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{+\infty} \frac{dt}{t^2} = \|2x \varphi\|_\infty \left[-\frac{1}{t} \right]_{\frac{1}{\sqrt{A}}}^{+\infty} = \|2x \varphi\|_\infty \sqrt{A}. \end{aligned}$$

Donc T est bien une distribution, d'ordre au plus 1.

Exercice 7:

Soit $E, a \in \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

Alors, soit $p_0 \in \mathbb{N}$ tel que $p_0 = E(a) + 1$ ($p_0 \geq a$). On a:

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \sum_{p=0}^{p_0} \varphi^{(p)}(p) \right| = \left| \sum_{p=0}^{p_0} \varphi^{(p)}(p) \right| \leq \sum_{p=0}^{p_0} \|\varphi^{(p)}\|_\infty$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus p_0 sur $[E, a]$. Or, si $a \rightarrow +\infty$, $p_0 \rightarrow +\infty$, donc T est une distribution d'ordre infini sur $\mathbb{R}$.

Exercice 8:

1. Soit $E, a \in \mathbb{R}$, $\text{supp } \varphi \subset [E, a]$. Pour $\alpha \in]-2, -1[$ et $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned} \int_E^\infty x^\alpha \varphi(x) dx &= \int_E^a x^\alpha \varphi(x) dx \\ &= \int_E^a x^\alpha \varphi(0) + x^{\alpha+1} \psi(x) dx \quad \text{avec } \psi(x) = \int_0^1 \varphi(xu) du \\ &= \int_E^a x^\alpha \varphi(0) dx + \int_E^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{On: } \int_E^a x^\alpha \varphi(0) dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0) \right]_E^a = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0) - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0)$$

$$\text{On pose } h_\varepsilon = -\frac{\varphi(0)}{\alpha+1}$$

$$\text{et } R_\varepsilon = \int_E^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1}$$

On, $x \mapsto x^{\alpha+1}$ est L^1 au voisinage de 0 et ψ est $C_0^\infty(\mathbb{R})$ donc

$x \mapsto x^{\alpha+1} \psi(x)$ est L^1 au voisinage de 0. $\left(x^{\alpha+1} \psi(x) \right)_{0^+} \sim \frac{\psi(0)}{x^{-(\alpha+1)}}$

Donc R_ε possède une limite lorsque $\varepsilon \rightarrow 0^+$:

$$\int_0^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1}$$

$$\leq \text{On pose donc: } \langle pf(x^\alpha), \varphi \rangle = \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1} + \int_0^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx$$

Comme $|\psi(x)| \leq \|\varphi'\|_\infty$, on a bien $|\langle pf(x^\alpha), \varphi \rangle| \leq C_1 \|\varphi\|_\infty + C_2 \|\varphi'\|_\infty$ et $pf(x^\alpha)$ est d'ordre au plus 1.