Institut Galilée
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale

2009-2010

①

Feuille de TD 3 : Distributions - Support et opérations.

Exercice 1 :

(i) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$. Alors $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx = 0$ car $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}_-^*$. Donc $(\operatorname{supp} T)^c \supset \mathbb{R}_-^*$ et donc $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta > 0$ et soit $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Soit φ une fonction "pic", $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. En particulier, φ est strictement positive sur $V \subset V_\delta$, $x_0 \in V$. On a de plus : $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,dx = \int_{x^2 \in V_\delta} \varphi(x^2)\,dx \geq \int_{x \in]\sqrt{x_0 - \delta}, \sqrt{x_0 + \delta}[} \varphi(x^2)\,dx$

$$= \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi(y)\,dy \geq \int_V \varphi(y)\,dy > 0.$$

Donc T est non nulle au voisinage de x_0 et $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$.
Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$, donc $\mathbb{R}_+ = \operatorname{supp} T$.

(ii) Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\delta > 0$ tel que $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}^*$. Puis, soit $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$.
Par ailleurs, $f : x \mapsto 2x e^{x^2}$ a un signe constant sur V_δ, disons positif donc : $\langle T, \varphi \rangle \underset{IPP}{=} \int_{V_\delta} \varphi(x) f(x)\,dx > 0$

Donc $\mathbb{R}^* \subset \operatorname{supp} T$ et comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R} \subset \operatorname{supp} T$. Donc $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}$.

(iii) Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp} \varphi \subset \mathbb{R}_-^*$, alors $\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi(x) \log x\,dx = 0$.

Donc $\operatorname{supp} T \subset \mathbb{R}_+$.
Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\delta > 0$ tel que $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}_+^*$.
Soit $\varphi \in C_0^\infty(]x_0 - \delta, x_0 + \delta[)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$.

②

Alors, $\langle T, \varphi\rangle = \int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \varphi'(x)\log x\,dx = -\int_{x_0-\delta}^{x_0+\delta} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx > 0.$

Donc $x_0 \in \operatorname{supp} T$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \operatorname{supp} T$. Comme $\operatorname{supp} T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \operatorname{supp} T$ et finalement, $\operatorname{supp} T = \mathbb{R}_+$.

Exercice 2 :

1. Supposons que $fT = 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset Z(f)^c$.
Alors $\frac{\varphi}{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ et on a : $\langle T, \varphi\rangle = \langle fT, \frac{\varphi}{f}\rangle = 0$.
Donc T s'annule sur $Z(f)^c$ et donc $\operatorname{supp} T \subset Z(f)$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ d'ordre 0 et supposons que $\operatorname{supp} T \subset Z(f)$.
Soit K un compact de $\mathbb{R}^m$. Comme T est d'ordre 0, il existe $c > 0$ tel que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$,
$$|\langle T, \varphi\rangle| \leq C\|\varphi\|_\infty.$$
Or, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $f\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ avec $\operatorname{supp}(f\varphi) \subset K$.
Donc : $|\langle fT, \varphi\rangle| = |\langle T, f\varphi\rangle| \leq C\|f\varphi\|_\infty$.
Or, comme $\operatorname{supp} T \subset Z(f)$, $f\varphi$ est nulle sur $\operatorname{supp} T$ et donc $|\langle fT, \varphi\rangle| = 0$. Donc $fT = 0$.

3. Supposons $T = \delta'$ qui n'est pas d'ordre 0. Prenons $f(x) = x$ par exemple. Alors $\operatorname{supp} T \subset Z(f)$ car $\operatorname{supp} T = \{0\}$, mais si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\varphi(0) \neq 0$:
$$\langle x\delta_0', \varphi\rangle = \langle \delta_0', x\varphi\rangle = (x\varphi)'(0) = \varphi(0) \neq 0.$$
Donc $x\delta_0'$ n'est pas la distribution nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle f\delta_0', \varphi\rangle = \langle \delta_0', f\varphi\rangle = f'(0)\varphi(0) + f(0)\varphi'(0)$
Alors $\langle f\delta_0', \varphi\rangle$ est nul pour φ quelconque si et seulement si :
$$f(0) = f'(0) = 0.$$
Alors $f(x) = x^2 g(x)$ avec $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 3

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle x\, vp(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \langle vp(\frac{1}{x}), x\varphi \rangle$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{x\,\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \varphi(x)\,dx = \langle 1, \varphi \rangle.$$

Donc on a bien : $x\, vp(\frac{1}{x}) = 1$.

2. a. On sait que T s'annule sur les fonctions de la forme $x\varphi$ avec $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ que l'on écrit :

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x) \quad \text{avec } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } \varphi(0) \neq 0.$$

Soit maintenant $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur le support de φ. En multipliant l'égalité précédente par ϕ on obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R},\quad \varphi(x) = \varphi(x)\phi(x) = \varphi(0)\,\phi(x) + x\,\psi(x)\,\phi(x).$$

D'où : $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0)\,\langle T, \phi \rangle + \langle xT, \psi\phi \rangle$

Or $xT = 0$ donc : $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0)\,\langle T, \phi \rangle$

et comme $\varphi(0) \neq 0$: $\langle T, \phi \rangle = \dfrac{\langle T, \varphi \rangle}{\varphi(0)} = c_\varphi$, indépendante de ϕ.

b. On choisit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que ϕ vaille 1 à la fois sur le support de φ et sur le support de $\tilde{\varphi}$. Alors :

$$c_\varphi = \langle T, \phi \rangle = c_{\tilde{\varphi}}.$$

c. Notons C la valeur commune de toutes les c_φ pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \varphi(0) \neq 0$.

Alors, $\langle T, \varphi \rangle = \varphi(0)\, C = C\,\langle \delta_0, \varphi \rangle$.

Si $\varphi(0) = 0$ on a encore $\langle T, \varphi \rangle = C\,\langle \delta_0, \varphi \rangle = 0$.

Donc si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec $xT = 0$, alors $T = C\delta_0$, $C \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

La réciproque est vraie car $x\,C\delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $x\,C\delta_0 = 0$ car $\mathrm{supp}(\delta_0) \subset \{0\}$.

3. Comme $x\,vp(\frac{1}{x})=1$, l'équation $xT=1$ s'écrit:

$$x\left(T-vp(\tfrac{1}{x})\right)=0.$$

D'où par 2.c., $T-vp(\frac{1}{x})=C\delta_0$, $C\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Donc les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $xT=1$ sont les $T\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de la forme $T=vp(\frac{1}{x})+C\delta_0$, $C\in\mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

4. (i) Soit $O_m=\left]-\frac{3\pi}{4}+m\pi\,,\,\frac{3\pi}{4}+m\pi\right[$. Alors $(O_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ est un recouvrement localement fini de $\mathbb{R}$. Soit $(\chi_m)_{m\in\mathbb{Z}}$ une partition de l'unité associée à $(O_m)_{m\in\mathbb{Z}}$. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On décompose φ en:

$$\varphi=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\varphi\,\chi_m \underset{not}{:=} \sum_{m\in\mathbb{Z}}\varphi_m.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, chaque φ_m s'écrit: $\forall x\in\mathbb{R}, \varphi_m(x)=\varphi(m\pi)+(x-m\pi)\psi_m(x)$ avec $\psi_m\in C_0^\infty(O_m)$.
On remarque par ailleurs que $x\mapsto\frac{x-m\pi}{\sin x}$ est C^∞ sur O_m. Enfin, si η_m est une fonction plateau valant 1 sur O_m et à support dans $]-\pi+m\pi,\pi+m\pi[$, alors on écrit:

$$\forall x\in\mathbb{R},\ \varphi_m(x)=\varphi_m(x)\eta_m(x)=\varphi(m\pi)\eta_m(x)+\sin x\,\underbrace{\frac{x-m\pi}{\sin x}\psi_m(x)\eta_m(x)}_{=\theta_m\,\in C_0^\infty(\mathbb{R})}$$

Donc:
$$\langle T,\varphi\rangle=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\Big[\langle T,\eta_m\rangle\varphi(m\pi)+\underbrace{\langle(\sin x)T,\theta_m\rangle}_{=0}\Big]$$
$$=\sum_{m\in\mathbb{Z}}\langle T,\eta_m\rangle\,\varphi(m\pi)$$

Si on pose $c_m=\langle T,\eta_m\rangle$, on a bien: $T=\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m\delta_{m\pi}$.

(ii) Réciproquement, si $T=\sum_{m\in\mathbb{Z}}c_m\delta_{m\pi}$, comme $\sin(m\pi)=0$, on a bien: $(\sin x)T=0$.

Exercice 4 :

1. a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors : $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$

$$= -\int_0^\infty 1 \times \varphi'(x)\,dx$$

$$= -[\varphi(x)]_0^\infty + \int_0^\infty 0\,dx$$

Donc $H' = \delta_0$ $\qquad = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$

b. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors : $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = -\langle \log|x|, \varphi' \rangle$

$\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$.

$$= -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx$$

On : $$\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x|\,\varphi'(x)\,dx = -\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx + (\log \varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)]$$

Or, en écrivant Taylor à l'ordre 1 pour φ, on obtient :

$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon\,\psi(\varepsilon)$ avec $\psi(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

$\varphi(-\varepsilon) = \varphi(0) - \varepsilon\,\tilde{\psi}(\varepsilon)$ avec $\tilde{\psi}(\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

Donc : $(\log \varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] = -(\varepsilon \log \varepsilon)(\psi(\varepsilon) + \tilde{\psi}(\varepsilon))$

Or $\varepsilon \log \varepsilon \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$ donc $(\log \varepsilon)[\varphi(-\varepsilon) - \varphi(\varepsilon)] \xrightarrow[\varepsilon \to 0]{} 0$

et $\langle (\log|x|)', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,dx = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

Donc : $(\log|x|)' = vp\left(\frac{1}{x}\right)$.

c. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Alors :

$$\langle vp(\tfrac{1}{x})', \varphi \rangle = -\langle vp(\tfrac{1}{x}), \varphi' \rangle = -\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx$$

On : $$-\int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi'(x)}{x}\,dx = \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{-A}^{-\varepsilon} + \left[\frac{\varphi(x)}{x}\right]_{\varepsilon}^{A} + \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

$$= -\frac{\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon} - \frac{\varphi(\varepsilon)}{\varepsilon} + \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x^2}\,dx$$

⑥

$$\text{Or, } \varphi(\varepsilon)=\varphi(0)+\varepsilon\psi(\varepsilon) \text{ avec } \psi(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$
$$\varphi(-\varepsilon)=\varphi(0)-\varepsilon\tilde{\psi}(\varepsilon) \text{ avec } \tilde{\psi}(\varepsilon)\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{}0$$

$$\text{Donc : } -\frac{\varphi(\varepsilon)+\varphi(-\varepsilon)}{\varepsilon}=-2\frac{\varphi(0)}{\varepsilon}+\underbrace{[\psi(\varepsilon)+\tilde{\psi}(-\varepsilon)]}_{\downarrow \varepsilon\to 0 \atop 0}$$

$$\text{D'où : } \langle vp(\tfrac{1}{x})',\varphi\rangle=\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{|x|>\varepsilon}\frac{\varphi(x)}{x^2}dx-\frac{2\varphi(0)}{\varepsilon}\right]:=Pf\left(\frac{1}{x^2}\right).$$

2. On a, par intégrations par parties successives ; pour $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$\forall k\leq m,\ \left\langle\left(\frac{x^m}{m!}H(x)\right)^{(k)},\varphi\right\rangle=(-1)^k\left\langle\frac{x^m}{m!}H(x),\varphi^{(k)}\right\rangle$$
$$=(-1)^k\int_0^\infty\frac{x^m}{m!}\varphi^{(k)}(x)\,dx$$
$$=(-1)^k(-1)^k\int_0^\infty\frac{x^{m-k}}{(m-k)!}\varphi(x)\,dx.$$

$$\text{D'où : } \left(\frac{x^m}{m!}H(x)\right)^{(k)}=\frac{x^{m-k}}{(m-k)!}H(x).$$

Pour $k=m+1$: $\left(\frac{x^m}{m!}H(x)\right)^{(m+1)}=\delta_0$ et pour $k\geq m+2$, $\left(\frac{x^m}{m!}H(x)\right)^{(k)}=\delta^{(k-m-1)}$.

Exercice 5 :

Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi\subset[-A,A]$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$:

$$\langle T_n,\varphi\rangle=\int_{-A}^{A}\frac{\sin(nt)}{\pi t}\varphi(t)\,dt.$$

On décompose φ en : $\varphi(t)=\varphi(0)+t\psi(t)$ avec $\psi(t)\in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

Alors : $\forall n\in\mathbb{N}$, $\langle T_n,\varphi\rangle=\varphi(0)\int_{-A}^{A}\frac{\sin(nt)}{\pi t}dt+\frac{1}{\pi}\int_{-A}^{A}\psi(t)\sin(nt)\,dt.$

D'après Riemann-Lebesgue, la seconde intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Puis en faisant le changement de variable $u=nt$ dans la première intégrale, on obtient : $\int_{-nA}^{nA}\frac{\sin u}{\pi u}du\xrightarrow[n\to+\infty]{}\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\sin u}{u}du=1$

Ainsi : $\lim_{n\to+\infty}\langle T_n,\varphi\rangle=\varphi(0)=\langle\delta_0,\varphi\rangle$. Donc : $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 6 :

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On écrit : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\,\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(tx)\,dt$

Alors : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi \rangle = n\left(\varphi\left(\frac{1}{n}\right) - \varphi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)$

$$= n\left(\cancel{\varphi(0)} + \frac{1}{n}\psi\left(\frac{1}{n}\right) - \left(\cancel{\varphi(0)} - \frac{1}{n}\psi\left(-\frac{1}{n}\right)\right)\right)$$

$$= \psi\left(\frac{1}{n}\right) + \psi\left(-\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\psi(0) = 2\int_0^1 \varphi'(0)\,dt$$

$$= 2\varphi'(0)$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} 2\varphi'(0) = \langle 2\delta_0', \varphi \rangle$

Donc $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $2\delta_0'$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or, pour tout n, T_n est d'ordre 0 et $2\delta_0'$ est d'ordre 1. En général, il n'y a pas de lien entre l'ordre des éléments de la suite et l'ordre de la limite.

Exercice 7 :

(i) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle A_n, \varphi \rangle = \int_{-A}^{A} \sin(nx)\,\varphi(x)\,dx$$

$$= \underbrace{\left[-\frac{\cos(nx)}{n}\varphi(x)\right]_{-A}^{A}}_{=0} + \int_{-A}^{A} \frac{\cos(nx)}{n}\varphi'(x)\,dx$$

Donc : $\forall n \in \mathbb{N}, |\langle A_n, \varphi\rangle| \leq \frac{1}{n}\int_{-A}^{A} |\varphi'(x)|\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0$.

Donc $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle B_n, \varphi \rangle = \int_{-A}^{A} n\,g(nx)\,\varphi(x)\,dx \underset{u = nx}{=} \int_{-nA}^{nA} g(u)\,\varphi\left(\frac{u}{n}\right)du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(u)\,\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u)\,du.$$

Or : $g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u) \xrightarrow[n\to+\infty]{} g(u)\varphi(0)$, $\forall u \in \mathbb{R}$.

et : $\left|g(u)\varphi\left(\frac{u}{n}\right)\mathbb{1}_{[-nA,nA]}(u)\right| \leq |g(u)|\,\|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})$

(8)

Donc, par le théorème de convergence dominée :

$$\langle B_n, \varphi \rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} g(u)\,du$$

Donc $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $\left(\int_{\mathbb{R}} g(u)\,du\right) \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors :

$$\langle C_n, \varphi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{p}{n}\right) \xrightarrow[n\to+\infty]{\text{somme de Riemann}} \int_0^1 \varphi(x)\,dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \mathbb{1}_{[0,1]}(x)\,dx.$$

Donc $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers la distribution associée à $\mathbb{1}_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iv) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $n\in\mathbb{N}$,

$$\langle D_n, \varphi \rangle = \langle e^{inx}\, vp\left(\tfrac{1}{x}\right), \varphi \rangle = \langle vp\left(\tfrac{1}{x}\right), e^{inx}\varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{e^{inx}\varphi(x)}{x}\,dx$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0} \left[\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx + i \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx \right]$$

Pour la partie réelle :

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\psi \subset [-A, A]$.

On a : $$\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\underbrace{\cancel{\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \frac{\cos(nx)}{x}\,dx}}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\psi(x)\,dx$$

Donc : $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \cos(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \int_{-A}^{A} \cos(nx)\psi(x)\,dx \xrightarrow[n\to+\infty]{} 0.$$

Pour la partie imaginaire : $$\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\int_{A\geq|x|>\varepsilon} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx + \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \psi(x)\sin(nx)\,dx$$

Donc : $$\lim_{\varepsilon\to 0} \int_{A\geq|x|>\varepsilon} \sin(nx)\frac{\varphi(x)}{x}\,dx = \varphi(0)\underbrace{\int_{-A}^{A} \frac{\sin(nx)}{x}\,dx}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi \text{ par exercice 5}} + \underbrace{\int_{-A}^{A} \sin(nx)\psi(x)\,dx}_{\xrightarrow[n\to+\infty]{} 0} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \pi\varphi(0) + 0$$

9 Donc : $\langle D_n, \varphi\rangle \xrightarrow[n\to+\infty]{} i\pi\varphi(0)$ et $(D_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers $i\pi\delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

Exercice 8 :

1. Soit $t \not\equiv 0\,[2\pi]$. Alors : $\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} = e^{-iNt} + \dots + 1 + \dots + e^{iNt}$

$$= e^{-iNt}\left[1 + \dots + e^{2iNt}\right]$$

$$= e^{-iNt}\,\frac{e^{i(2N+1)t}-1}{e^{it}-1}$$

$$= \underbrace{e^{-iNt}\,e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}\,e^{-i\frac{t}{2}}}_{=1}\;\frac{e^{i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}-e^{-i\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}}{e^{i\frac{t}{2}}-e^{-i\frac{t}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$$

Donc : $\forall t\in\mathbb{R}\setminus 2\pi\mathbb{Z}$, $F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\,\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}$.

2. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\operatorname{supp}\varphi \subset [-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Alors, pour tout $N\in\mathbb{N}$,

$$\langle T_N, \varphi\rangle = \int_{-(2M+1)\pi}^{(2M+1)\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt = \sum_{m=-M}^{M}\int_{2m\pi-\pi}^{2m\pi+\pi} F_N(t)\varphi(t)\,dt$$

$$\overset{u=t+2m\pi}{=} \sum_{m=-M}^{M}\int_{-\pi}^{\pi} F_N(u)\,\varphi(u-2m\pi)\,du$$

par 2π périodicité de F_N

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)u}{\sin\frac{u}{2}}\underbrace{\sum_{m=-M}^{M}\varphi(u-2m\pi)}_{=\phi(u)}\,du$$

3. On écrit $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, $\psi\in C^\infty(\mathbb{R})$. D'où :

$$\forall N\in\mathbb{N},\quad \langle T_N, \varphi\rangle = \frac{1}{2\pi}\phi(0)\int_{-\pi}^{\pi}\frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin\frac{t}{2}}\,dt + \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t)\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t\,dt$$

Or, $t\mapsto \frac{t}{\sin\frac{t}{2}}\psi(t)\in L^1([-\pi,\pi])$, donc par Riemann-Lebesgue la seconde intégrale tend vers 0 lorsque N tend vers l'infini.

⑩ D'autre part :

$$\frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}\right)t}{\sin \frac{t}{2}}\, dt = \phi(0)\int_{-\pi}^{\pi} F_N(t)\, dt = \frac{\phi(0)}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt}\, dt$$

$$= \frac{\phi(0)}{2\pi} \times 2\pi = \phi(0)$$

Donc : $\langle T_N, \varphi\rangle \xrightarrow[N\to+\infty]{} \phi(0) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(2k\pi) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \varphi(2k\pi)$

$$= \langle \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}, \varphi\rangle.$$

Donc $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On en déduit la formule de Poisson :

$$\sum_{m\in\mathbb{Z}} e^{imx} = 2\pi \sum_{m\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}.$$