Institut Galilée 2009-2010

Filière MACS 2

Mathématiques, Théorie Générale

1

Feuille de TD 4 : Convolution - Equations différentielles et équations aux dérivées partielles.

Exercice 1 - Sur la convolution

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a : $\langle \delta_0' * \delta_0', \varphi \rangle = \langle \delta_0' \otimes \delta_0', \varphi^\Delta(x,y) \rangle$

$$= \langle \delta_0', -\langle \delta_0, \partial_y \varphi^\Delta(x,y) \rangle \rangle$$

où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$.

$$= \langle \delta_0', -\varphi'(x) \rangle$$

$$= \varphi''(0).$$

Donc $\delta_0' * \delta_0' = \delta_0''$.

On peut aussi dériver l'égalité : $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, deux fois.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note φ_x la fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. On a :

$$\langle \delta_a' \otimes \delta_b', \varphi \rangle = \langle \delta_a', \langle \delta_b', \varphi_x \rangle \rangle = \langle \delta_a', -\varphi_x'(b) \rangle$$

$$= \langle \delta_a', -\partial_y \varphi(x,b) \rangle = \partial_x \partial_y \varphi(a,b).$$

3. $E = \delta_0^{(k)}$ convient. En effet si on dérive k fois l'identité $\delta_0 * T = T$ on obtient $\delta_0^{(k)} * T = T^{(k)}$.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\langle X^m(T*S), \varphi \rangle = \langle T*S, X^m\varphi \rangle = \langle T \otimes S, (x+y)^m \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$

où $\varphi^\Delta(x,y) = \varphi(x+y)$

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k \langle T \otimes S, x^k y^{m-k} \varphi^\Delta(x,y) \rangle$$

$$= \sum_{k=0}^m C_m^k \langle (x^k T) \otimes (y^{m-k} S), \varphi^\Delta(x,y) \rangle = \langle \sum_{k=0}^m C_m^k (X^k T) * (X^{m-k} S), \varphi \rangle$$

②

Exercice 2 :

1. On a : $(xT)' = xT' + T$.

2. Par 1., l'équation $xT' + T = 0$ devient $(xT)' = 0$.

Donc il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $xT = C_1$. Or, $C_1 vp(1/x)$ est solution de cette équation. Donc : $xT = C_1 \Leftrightarrow x(T - C_1 vp(1/x)) = 0$.

Donc il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que :

$$T - C_1 vp(1/x) = C_2 \delta_0$$

soit encore : $$T = C_1 vp(1/x) + C_2 \delta_0 .$$

Exercice 3 :

1. Comme l'équation différentielle $2xu' - u = 0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions : $u(x) = C_1 \sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions : $u(x) = C_2 \sqrt{x}$.

On note $x_+ = \max(x, 0)$ et $x_- = \max(-x, 0)$.

Les fonctions localement intégrables $u : x \mapsto C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu' - u = 0$.

2.a. Les distributions associées aux fonctions $u : x \mapsto C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT' - T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1 = \frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

Alors : $$S_1' = \frac{T_1'}{\sqrt{x}} - \frac{T_1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2xT_1' - T_1}{2x\sqrt{x}} = 0$$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (convexe), il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $S_1 = C_1$. D'où $T_1 = C_1 \sqrt{x_+}$.

De même : $T_2 = C_2 \sqrt{x_-}$.

③ b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle S,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle - \langle T_1,\varphi\rangle - \langle T_2,\varphi\rangle$

$$= \langle T_1,\varphi\rangle - \langle T_1,\varphi\rangle - 0$$
$$= 0$$

Et si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$, $\langle S,\varphi\rangle = \langle T,\varphi\rangle - \langle T_1,\varphi\rangle - \langle T_2,\varphi\rangle$

$$= \langle T_2,\varphi\rangle - 0 - \langle T_2,\varphi\rangle$$
$$= 0.$$

Donc $\mathbb{R}_+^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$ et $\mathbb{R}_-^* \subset (\operatorname{supp} S)^c$, donc $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_-$ et $\operatorname{supp} S \subset \mathbb{R}_+$.

Donc : $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R = 0$ alors $2xR' - R = 0$.

Réciproquement, supposons que $2xR' - R = 0$ et montrons que $R = 0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\langle 2x(\delta^{(k)})', \varphi\rangle = -\langle \delta^{(k)}, (2x\varphi)'\rangle$$
$$= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi\rangle - \langle \delta^{(k)}, 2x\varphi'\rangle$$
$$= 2(-1)^{k+1}\left(2\varphi^{(k)}(0) + (2x\varphi')^{(k)}(0)\right)$$
$$= 2(-1)^{k+1}(k+1)\,\varphi^{(k)}(0)$$

Donc $2xR' - R = \sum_{k=0}^{p} \left(2(-1)^{k+1}(k+1) - 1\right) a_k \delta^{(k)}$

Or $2xR' - R = 0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R = 0$.

d. Comme par b., $\operatorname{supp} S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2xT' - T = 0$, alors S aussi et donc par c., $S = 0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1\sqrt{x_+} + C_2\sqrt{x_-}$ ~~sont~~ les solutions de $2xT' - T = 0$.

2. La forme du second membre δ_0 nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c., il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0\delta_0$ dans l'équation, on en tire : $(2(-1)(1) - 1)a_0 = 1$ soit $a_0 = -\frac{1}{3}$.

Donc les solutions de l'équation différentielle $2xT'-T=\delta_0$ sont les

$$C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}-\frac{1}{3}\delta_0.$$

3. On note $T_0 = C_1\sqrt{x_+}+C_2\sqrt{x_-}-\frac{1}{3}\delta_0$. Soit $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $T_0 * f$ est solution de $2xT'-T=f$.

En effet : $2x(T_0*f)'-T_0*f = 2xT_0'*f - T_0*f = (2xT_0'-T_0)*f = \delta_0*f = f$.

Et $T_0*f = C_1\underbrace{\sqrt{x_+}*f}_{\text{convolution des fonctions}} + C_2\sqrt{x_-}*f - \frac{1}{3}f$

Exercice 4 :

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset K$.
Posons $K_1=\{x\in\mathbb{R} \mid (x,-x)\in K\}$ qui est compact car K l'est. Alors :

$$|\langle T,\varphi\rangle| \leq \left(\int_{K} dx\right)\sup_{(x,y)\in K}|\varphi(x,y)| \leq C\|\varphi\|_\infty.$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D la droite $D=\{(x,-x) \mid x\in\mathbb{R}\}$. Montrons que $\operatorname{supp}T = D$.
Tout d'abord, soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi\subset\mathbb{R}^2\setminus D$. Alors $\varphi(x,-x)=0$ pour tout $x\in\mathbb{R}$ et $\langle T,\varphi\rangle=0$. Donc $D^c\subset(\operatorname{supp}T)^c$ et $\operatorname{supp}T\subset D$.
Réciproquement, montrons que tout point $M_0=(x_0,-x_0)\in D$ est dans $\operatorname{supp}T$.
Soit $\delta>0$. Soit $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, avec $\operatorname{supp}\varphi\subset B(M_0,\delta)$ et $\varphi(x,y)=1$ pour tout $(x,y)\in B(M_0,\frac{\delta}{2})$. Alors :

$$|\langle T,\varphi\rangle| = \left|\int_{B(M_0,\delta)\cap\mathbb{R}}\varphi(-x,x)\,dx\right| \geq \int_{B(M_0,\frac{\delta}{2})\cap\mathbb{R}}\underbrace{\varphi(-x,x)}_{=1}dx$$
$$\geq Leb(V) > 0$$

où $V=\{x\in\mathbb{R} \mid (x,-x)\in B(M_0,\frac{\delta}{2})\}$ est de mesure de Lebesgue strictement

positive. Donc T est non nulle au voisinage de M_0, donc $M_0 \in \operatorname{supp} T$.
Ainsi $D \subset \operatorname{supp} T$ et $D = \operatorname{supp} T$.

3. Si T est la distribution T_f associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ f, alors $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} f$ où $\operatorname{supp} f$ est le support de f au sens des fonctions continues. Alors, f serait nulle en dehors de D qui est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$, donc T_f serait nulle. Or T est non nulle.

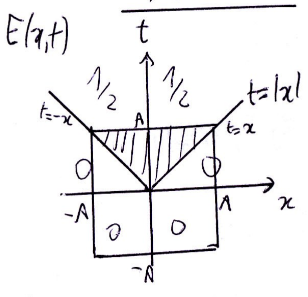
4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $\phi(x) = \varphi(x,-x)$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x,-x) - \dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x,-x)$

D'où : $\langle \partial_x T - \partial_y T, \varphi \rangle = -\int_{\mathbb{R}} (\partial_x \varphi - \partial_y \varphi)(x,-x)\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\,dx$
$= [\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car ϕ est à support compact.

Donc : $(\partial_x - \partial_y) T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 5.



1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp} \varphi \subset [-A,A]^2$, $A>0$. On a :

$$\langle (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) E, \varphi \rangle = \langle E, (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)\varphi \rangle$$

Par Fubini

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^A \int_x^A \partial_{tt}^2 \varphi(x,t)\,dt\,dx + \int_{-A}^0 \int_{-x}^A \partial_{tt}^2 \varphi(x,t)\,dt\,dx - \int_0^A \int_{-t}^t \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\,dx\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[\int_0^A -\partial_t \varphi(x,x)\,dx + \int_{-A}^0 -\partial_t \varphi(x,-x)\,dx - \int_0^A \partial_x \varphi(t,t) - \partial_x \varphi(-t,t)\,dt \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \partial_t \varphi(u,u)\,du - \int_0^A \partial_x \varphi(u,u)\,du - \int_0^A \partial_t \varphi(-u,u)\,du + \int_0^A \partial_x \varphi(-u,u)\,du \right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[-\int_0^A \phi_1'(u)\,du - \int_0^A \phi_2'(u)\,du \right] \text{ où } \phi_1(u) = \varphi(u,u) \text{ et } \phi_2(u) = \varphi(-u,u)$$

$$= \frac{1}{2}\left[\phi_1(0) + \phi_2(0) \right] = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $(\partial^2_{tt}-\partial^2_{xx})E=\delta_0$.

2. Si $f\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} f\}$ est une paire convolutive et on a :

$$(\partial^2_{tt}-\partial^2_{xx})(E*f) = (\partial^2_{tt}E-\partial^2_{xx}E)*f = \delta_0*f=f.$$

Donc $u=E*f$ est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de $\partial^2_{tt}u-\partial^2_{xx}u=f$.

3. Comme E est C^∞ sur $\mathbb{R}^2\setminus\{(t,x)\in\mathbb{R}^2,\ t=|x|\}$, et que $\{(t,x)\in\mathbb{R}^2 \mid t=|x|\}$ est de mesure nulle, si $f\in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $E*f$ est C^∞ sur Ω. Donc $u\in C^\infty(\Omega)$.

Exercice 6 :

1. Pour $d=1$ et $x\in\mathbb{R}$, on écrit $E(x)=x_+=xH(x)$.

Alors $(xH(x))' = H(x)+\underbrace{x\delta_0}_{=0}$ et $(xH(x))''=H'(x)=\delta_0$.

Donc $E''=\delta_0$.

2. On suppose $d\geq 2$. Soit $j\in\{1,\dots,d\}$. On a, pour tout $x\in\mathbb{R}^d\setminus\{0\}$,

$$\partial_j F(x) = \partial_j(|x|)\, f'(|x|) = \frac{x_j}{|x|} f'(|x|).$$

et
$$\partial^2_{jj}F(x) = \frac{x_j}{|x|}\times\partial_j(|x|)\, f''(|x|) + \partial_j\left(\frac{x_j}{|x|}\right) f'(|x|)$$
$$= \frac{x_j^2}{|x|^2}f''(|x|) + \left(\frac{1}{|x|}-\frac{x_j^2}{|x|^3}\right)f'(|x|)$$

D'où :
$$\Delta F(x) = \sum_{j=1}^d \partial^2_{jj}F(x) = \frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{|x|^2} f''(|x|) + \left(\sum_{j=1}^d \frac{1}{|x|}\right) f'(|x|) - \frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{|x|^3} f'(|x|)$$
$$= \frac{|x|^2}{|x|^2}f''(|x|) + \frac{d}{|x|}f'(|x|) - \frac{|x|^2}{|x|^3}f'(|x|)$$
$$= f''(|x|)+\frac{d-1}{|x|}f'(|x|).$$

3. On résout sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle linéaire

$$f''(r)+\frac{d-1}{r}f'(r)=0.$$

Si $d=2$, on obtient $f(r) = a + b\log r$, $a,b\in\mathbb{R}$.

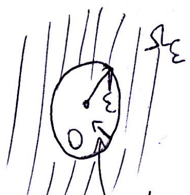
Si $d\geqslant 3$, on obtient $f(r) = a + \frac{b}{r^{d-2}}$, $a,b\in\mathbb{R}$.

4. Pour F comme dans l'énoncé et $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \Delta F,\varphi\rangle = \langle F,\Delta\varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to0^+}\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx.$$

On fixe $\varepsilon>0$. Par la formule de Green, on a :

$$\int_{\Omega_\varepsilon}(\Delta F)(x)\varphi(x) - F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon}\vec{N}\cdot\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\varphi(x) - \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)F(x)\Big)d\sigma(x)$$



normale sortante : $\vec{N} = -\frac{x}{|x|}$

D'où : $$\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \cancel{\int_{|x|>\varepsilon}(\Delta F)(x)\varphi(x)\,dx}^{=0\text{ par }3.} + \int_{|x|=\varepsilon}\frac{x}{|x|}\cdot\Big(\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\varphi(x) - \underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)F(x)\Big)d\sigma(x)$$

• On a aussi : $$\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{x}{|x|}\cdot F(x)\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\omega\in S^{d-1}} F(\varepsilon\omega)\big(-\nabla\varphi(\varepsilon\omega)\cdot\underset{\substack{\uparrow\\ x/|x|}}{\omega}\big)\varepsilon^{d-1}\,d\omega$$

Or : $$F(\varepsilon\omega) = \begin{cases}\log\varepsilon & \text{si } d=2\\ \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} & \text{si } d\geqslant 3\end{cases}$$

Donc $$\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{x}{|x|}\cdot F(x)\underbrace{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} 0$$ car $\varepsilon\log\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} 0$ et $\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} 0$.

• On a encore :

$$\int_{|x|=\varepsilon}\frac{x}{|x|}\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\omega\in S^{d-1}}\varphi(\varepsilon\omega)\underbrace{\nabla F(\varepsilon\omega)\cdot\omega}_{\frac{\partial f}{\partial r}(\varepsilon)}\varepsilon^{d-1}\,d\omega$$

avec $$f(r) = \begin{cases}\log r & \text{si } d=2\\ \frac{1}{r^{d-2}} & \text{si } d\geqslant 3\end{cases}$$

Donc : si $d=2$: $$\int_{|x|=\varepsilon}\frac{x}{|x|}\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla\varphi(x)}(x)\,d\sigma(x) = \varepsilon\int_{\omega\in S^1}\varphi(\varepsilon\omega)\frac{1}{\varepsilon}\,d\omega$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to0]{} \varphi(0)\int_{\omega\in S^1}d\omega = 2\pi\varphi(0).$$

et si $d\geqslant 3$: $$\int_{|x|=\varepsilon}\frac{x}{|x|}\cdot\varphi(x)\underbrace{\frac{\partial F}{\partial n}}_{\nabla F(x)}(x)\,d\sigma(x) = \varepsilon^{d-1}\int_{\omega\in S^{d-1}}\varphi(\varepsilon\omega)\Big(-\frac{d-2}{\varepsilon^{d-1}}\Big)\,d\omega$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to0]{} \varphi(0)\times(-(d-2))\times\sigma(S^{d-1}).$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \begin{cases} 2\pi\varphi(0) & \text{si } d=2 \\ -(d-2)\sigma(S^{d-1})\varphi(0) & \text{si } d\geq 3\end{cases}$$

Donc : $\langle \Delta F, \varphi\rangle = \begin{cases} 2\pi\langle \delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ -(d-2)\sigma(S^{d-1})\langle\delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3\end{cases}$

5. On a, pour $\varphi\in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \Delta E,\varphi\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\langle\Delta F,\varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ \frac{1}{-(d-2)\sigma(S^{d-1})}\langle\Delta F,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3\end{cases} = \begin{cases}\langle\delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ \langle\delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3\end{cases}$$

Donc $\Delta E = \delta_0$.

6. a. Si $p\in\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est à support compact, $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} p\}$ est convolutive et pour $d=3$, $-\Delta(E*(-p)) = -(\Delta E)*(-p) = (-\delta_0)*(-p) = p$.

Donc $V = E*(-p)$ est solution de $-\Delta V = p$ et elle tend vers 0 à l'infini car pour $d=3$, $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$.

Si V_1 et V_2 sont deux solutions de $-\Delta V = p$ qui tendent vers 0 à l'infini, alors $\Delta(V_1-V_2)=0$ et par le théorème de Liouville, $V_1-V_2=0$. Donc $V_1=V_2$ et $E*(-p)$ est l'unique solution de $-\Delta V=p$ qui tende vers 0 à l'infini.

b. • Pour une charge unique à l'origine : $p=\delta_0$. Alors :

$$V = E*(-p) = E*(-\delta_0) = -E \quad \text{i.e. } V(x) = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

• Pour un dipôle : $p = \delta'_{x_0}$, $x_0\neq 0$. Alors :

$$V = E*(-p) = E*(-\delta'_{x_0}) = -(E*\delta_{x_0})' = (-E)'*\delta_{x_0}.$$

Donc : $V(x) = \frac{1}{4\pi|x|}*\delta'_{x_0} = \left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)'*\delta_{x_0} = \tau_{x_0}\left(\frac{x}{4\pi|x|^3}\right) = \frac{x-x_0}{4\pi|x-x_0|^3}$

Exercice 7 - Equation de la chaleur.

1. On a, $\forall (x,t)\in\mathbb{R}^2$, $0\leq E(x,t)\leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}}\in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Donc $E\in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soient $t>0$ et $x\in\mathbb{R}$:

On a : $$\partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{x^2}{4t^2}e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\,t^{5/2}}\right]e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

et $$\partial^2_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \partial_x\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\frac{2x}{4t}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\partial_x\left(\frac{x}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{x}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}}\left(-\frac{x}{2t}\right)e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\,t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\,t^{5/2}}\right]e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

3. a. Soit $\varepsilon>0$. Soit $\varphi\in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$.

On a : $$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\partial_t\varphi(x,t)\,dt\,dx$$

IPP $\rightarrow$ $$= -\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_t\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\,dt\,dx$$

par 2. $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial^2_{xx}\left(\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\,dt\,dx$$

2×IPP + Fubini $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\partial^2_{xx}\varphi(x,t)\,dt\,dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx - J_\varepsilon.$$

Donc : $$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}}\frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}}\varphi(x,\varepsilon)\,dx.$$

10

3. On pose $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $dx = \sqrt{\varepsilon}\, dy$.

Alors : $I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)\, dy$

Or, par convergence dominée, comme $e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} e^{-y^2/4}\varphi(0,0)$,

et $|e^{-y^2/4}\varphi(\sqrt{\varepsilon}y,\varepsilon)| \leq \|\varphi\|_\infty e^{-y^2/4} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{\varepsilon\to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}\, dy = \varphi(0,0).$$

4. On a, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\langle (\partial_t - \partial^2_{xx})E, \varphi\rangle = -\langle E, \partial_t\varphi + \partial^2_{xx}\varphi\rangle$$

$$= -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\partial_t\varphi(x,t) + \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\right) dx\, dt$$

$$= -\int_{\mathbb{R}\times]0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\partial_t\varphi(x,t) + \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\right) dx\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left(I_\varepsilon + J_\varepsilon\right) = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi\rangle.$$

par convergence dominée. En effet :

$$\left|\frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)\right| \leq \frac{\partial_t\varphi(x,t)}{\sqrt{4\pi t}} H(t) \in L^1(\mathbb{R}\times\mathbb{R}_+)$$

et quand $\varepsilon\to 0$, $\mathbb{1}_{[\varepsilon,+\infty[}(t) \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t) \longrightarrow \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)$

et donc $I_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t\varphi(x,t)\, dx\, dt$.

De même : $J_\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} -\int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\, dx\, dt$.

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{(\partial_t - \partial^2_{xx})E = \delta_0}$

5. Comme $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} f\}$ est convolutive, $E * f$ convient.

6. Comme $E \in C^\infty(\mathbb{R}^2\setminus\{0\})$, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ alors $u \in C^\infty(\Omega)$ avec $u = E * f$.

Exercice 8 - Equation de Cauchy-Riemann

1. On a : $\forall (x,y)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}$, $|f(x,y)| = \frac{1}{|x+iy|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

car dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable en 0 si $\alpha < n$ (se voit en passant en coordonnées polaires).

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a :

$$\langle \bar\partial f, \varphi\rangle = \frac{1}{2}\langle \partial_x f, \varphi\rangle + \frac{i}{2}\langle \partial_y f, \varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\langle f, \partial_x\varphi\rangle - \frac{i}{2}\langle f, \partial_y \varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\langle f, \partial_x\varphi + i\partial_y\varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy}(\partial_x\varphi + i\partial_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy.$$

$\times \frac{x-iy}{x-iy}$ dans $\int$ $\searrow$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy - \frac{1}{2}i\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}(x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi)\,dx\,dy$$

en posant $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta\end{cases}$ $\rightarrow$
$$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r^2}\, r\partial_r\tilde\varphi(r,\theta)\times r\,dr\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_0^{2\pi}\!\!\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r^2}(\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta))\,r\,dr\,d\theta$$

et $\tilde\varphi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

car $\partial_r\tilde\varphi(r,\theta) = \partial_r\,\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\partial_x\varphi + \sin\theta\,\partial_y\varphi$
$$= \frac{1}{r}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)$$

et $\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta) = \partial_\theta\,\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = -r\sin\theta\,\partial_x\varphi + r\cos\theta\,\partial_y\varphi$
$$= x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi$$

Soit $\varepsilon > 0$: $$\langle\bar\partial f, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\!\!\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_r\tilde\varphi(r,\theta)\,dr\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta)\,d\theta\,dr\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{r}\underbrace{(\tilde\varphi(r,2\pi) - \tilde\varphi(r,0))}_{0}\,dr\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(0,0)\,d\theta = \pi\varphi(0,0).$$

par convergence dominée car $|\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)| \leq M$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ et $\tilde\varphi(\varepsilon,\theta) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0,0)$.

D'où $\langle\bar\partial f, \varphi\rangle = \pi\varphi(0,0) = \langle \pi\delta_0, \varphi\rangle$ i.e. $\bar\partial f = \pi\delta_0$.