U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2011-2012

Feuille d'exercices 1
Récurrence - Suites

Exercice 1
Démontrer, en raisonnant par récurrence que pour tout les entiers n de $\mathbb{N}$ sauf un seul que l'on déterminera, l'inégalité $2^n \geq n^2$ est vérifiée.

Exercice 2
Pour tout entier $n \geq 1$, posons $u_n = \frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \cdots + \frac{1}{\sqrt{n}}$. Montrer par récurrence que l'on a $u_n \geq \sqrt{n}$ pour tout $n \geq 1$. En déduire la limite de u_n.

Exercice 3
Montrer que

$$\forall n \geq 2, n! \leq \left(\frac{n+1}{2}\right)^n.$$

Exercice 4
Pour tout entier naturel n, on pose

$$S_n = 1 \cdot 2 + 2 \cdot 3 + \cdots + (n-1) \cdot n$$

Démontrer que l'on a

$$S_n = \frac{1}{3} n(n-1)(n+1)$$

Exercice 5
Démontrer par récurrence sur n que, pour tout $n \geq 2$, l'implication $[x > -1, x \neq 0] \Rightarrow [(1+x)^n > 1 + nx]$ est vraie.

Exercice 6

Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$ converge vers une limite ℓ. Trouver $N(\varepsilon)$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$, avec $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exercice 7

Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{n^2}{n+1}$ diverge et qu'elle tend vers l'infini. Trouver de même $N = N(\varepsilon)$ minimum tel que $v_n > 10^2$ pour $n > N$.

Exercice 8
Étudier la convergence des suites suivantes :

a. $\operatorname{Arctan}\left(n + \frac{1}{n}\right)$	b. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$
c. $\frac{n^{\frac{2}{3}}(n-1)^2}{(n+1)^2}$	d. $\frac{\sin n}{n}$
e. $\frac{1+(-1)^n}{n}$	f. $(-1)^n \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$

Exercice 9

Soit $a \in \mathbb{R}_+^*$. Calculer la limite de la suite $\left(\frac{2^n+3^n}{a^n}\right)$.

Exercice 10
Soit x un réel.
a. Déterminer la limite de $u_n = \frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$.
b. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 11
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1 + u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.
a. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
b. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.

Exercice 12
1. Soient $a, b > 0$. Montrer que $\sqrt{ab} \leqslant \frac{a+b}{2}$.
2. Montrer les inégalités suivantes ($b \geqslant a > 0$) :

$$a \leqslant \frac{a+b}{2} \leqslant b \text{ et } a \leqslant \sqrt{ab} \leqslant b.$$

3. Soient u_0 et v_0 des réels strictement positifs avec $u_0 < v_0$. On définit deux suites (u_n) et (v_n) de la façon suivante :

$$u_{n+1} = \sqrt{u_n v_n} \text{ et } v_{n+1} = \frac{u_n + v_n}{2}.$$

a. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \leqslant v_n$.
b. Montrer que (v_n) est une suite décroissante.
c. Montrer que (u_n) est croissante En déduire que les suites (u_n) et (v_n) sont convergentes et quelles ont même limite.

Exercice 13
Soit $n \geq 1$.
a. Montrer que l'équation $\sum_{k=1}^n x^k = 1$ admet une unique solution, notée a_n, dans $[0, 1]$.
b. Montrer que $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est décroissante minorée par $\frac{1}{2}$.
c. Montrer que (a_n) converge vers $\frac{1}{2}$.