U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2011-2012

Feuille d'exercices 2
Fonctions de la variable réelle

Exercice 1

1. Soit un polynôme de la forme $P(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \cdots + a_0$ avec $a_{2p+1} > 0$. Trouver $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ puis $\lim_{x\to\pm\infty} e^{P(x)} + P(x)$. En déduire que $e^{P(x)} + P(x) = 0$ admet au moins une solution relle.
2. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On se propose de montrer que f admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe α dans $[0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. Faire un graphique illustrant la situation. On considérera la fonction $g(x) = f(x) - x$, le signe de $g(0)$ et de $g(1)$ et on utilisera le théorème des valeurs intermédiaires.
3. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell < \infty$. Illustrer cette situation par un graphique. On se propose de montrer que f est borne. Autrement dit de vrifier que l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ y = f(x)\}$ est borné. Montrer qu'il existe $X > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\ell - \varepsilon \leq f(x) \leq \ell + \varepsilon$ pour tout $x \geq X$. Prouver le résultat en considérant les intervalles $[0, X]$ et $[X, +\infty]$.

Exercice 2

1. Préciser le domaine de définition et la dérivée de la fonction $\frac{1}{\cos\sqrt{x}}$.
2. Calculer $(x^2\,e^x)^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, à l'aide de la formule de Leibniz.
3. En utilisant une récurrence, montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \to x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ est égale la fonction $x \to (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

Exercice 3

1. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin x} - 2^{\sinh x}}{\sin x - \sinh x}$ en utilisant le théorème des accroissements finis.
2. Plus généralement, soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = a$. On suppose de plus que $f(x) \neq g(x)$ pour $x \neq x_0$. Calculer $\lim_{x\to x_0} \frac{2^{f(x)} - 2^{g(x)}}{f(x) - g(x)}$.

Exercice 4

1. Soit la suite (u_n) dfinie par $u_0 = 1$ et pour $n \geq 1$ par $u_n = u_{n-1} + \frac{1}{u_{n-1}}$. (On pourra s'aider du graphe de la fonction $x \to x + \frac{1}{x}$).
2. Montrer que (u_n) diverge. De quelle faon ?
3. Montrer que pour tout n, on a $2 < u_n^2 - u_{n-1}^2 \leq 2 + u_n - u_{n-1}$, puis que $2n + 1 < u_n^2 < 2n + u_n$.
4. En encadrant $\frac{2n}{u_n^2}$, trouver $\lim_{n\to\infty} \frac{u_n}{\sqrt{n}}$.

Exercice 5

1. Soit $(u_n = \varphi(u_{n-1}))$ une suite récurrente et ℓ une solution de l'équation $x = \varphi(x)$. On suppose qu'on a un intervalle I qui contient ℓ et sur lequel φ est dérivable avec $|\varphi'(x)| \leq k < 1$. En utilisant le théorème des accroissements finis, montrer que si à partir d'un certain rang N, on a $u_N \in I$, alors pour tout n plus grand que N, on a $u_n \in I$ avec $\left|\frac{u_{n+1} - \ell}{u_n - \ell}\right| < k$.
2. En déduire que (u_n) converge vers ℓ.
3. Soit la suite $u_n = \varphi(u_{n-1})$ avec $\varphi(x) = \frac{1}{2}\left(x + \frac{2}{x}\right)$ et $u_0 > 0$. Quelles sont les (la) limites possibles pour (u_n) ? Majorer $\varphi'(x)$ sur l'intervalle $I = [\sqrt{2}, +\infty[$.
4. Montrer que $u_1 \in I$. Constater que u_n converge, en utilisant le a).
5. Retrouver directement le fait que u_n est convergente en constatant que pour $n \geq 1$, elle est décroissante et minorée.

Exercice 6

Soit $f :]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.

1. Écrire le développement limités d'ordre 2 en 0 de f.
2. On cherche à donner une valeur approchée de $\sqrt{101}$ sans utiliser de calculatrice. Un étudiant se propose de poser $x = 100$ dans la formule obtenue à la question 1. Que peut-on en dire ?
3. Proposer une méthode plus efficace en utilisant la même formule.

Exercice 7
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 considérés (on les prolongera au préalable par continuité si besoin est) :

$$f(x) = |x|x, x_0 = 0; \quad g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, x_0 = 0;$$
$$h(x) = x\sin\frac{1}{x}, x_0 = 0; \quad k(x) = x\log x, x_0 = 0$$

Exercice 8
Soit f une fonction définie et dérivable sur $\mathbb{R}$.

1. Montrer que si f est paire, alors f' est impaire ; montrer que si f est impaire, alors f' est paire.
2. Montrer que si f est périodique, f' lest aussi.

Exercice 9
Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$.

1. Montrer que : $\forall\ h > 0,\ \forall\ x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.
2. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0M_2}$.

Exercice 10

1. Trouver un développement limité à l'ordre n au voisinage de l'origine de :

   a) $\tan x \quad (n = 5)$ b) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \quad (n = 2)$
   c) $e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \quad (n = 3)$.

2. En utilisant un développement limité, calculer les limites suivantes :

   a) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$; b) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\tan x - \arcsin x}$
   c) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$; d) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{x}}+3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$.

Exercice 11
Déterminer le développement limité au voisinage de 0 :

a. à l'ordre 3 de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$,

b. à l'ordre 4 de $x \mapsto 2\cos(x) - 1$,

c. à l'ordre 5 de $x \mapsto 2\sin(x) - \sin(2x)$,

d. à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$,

e. à l'ordre 3 de $x \mapsto (x - x^3)\sqrt{1+x}$,

f. à l'ordre 4 de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$,

g. à l'ordre 5 de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$,

h. à l'ordre 4 de $x \mapsto (\ln(1+x))^2$,

i. à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

Exercice 12

1. Donner le développement limité au voisinage de 0 et l'ordre 4 des fonctions $\ln(\cos x)$ et $\sin^2 x$.
2. En déduire la limite de la suite $u_n = n^4 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) + \frac{n^4}{2}\sin^2\frac{1}{n}$.

Exercice 13

1. Montrer que $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
2. En déduire que $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \geq 1$.
3. Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (au moins à partir d'un certain rang) et qu'elle est convergente.

Exercice 14

1. La fonction f vrifiant les conditions de Taylor-Lagrange sur un intervalle contenant a, trouver la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.
2. Soient f et g deux fonctions possdant des drives jusqu' l'ordre n au voisinage d'un point a et vrifiant :

   $$f(a) = f'(a) = \cdots = f^{(n)}(a) = 0,$$
   $$g(a) = g'(a) = \cdots = g^{(n)}(a) = 0 \quad \text{et} \quad g^{(n)}(a) \neq 0.$$

   Calculer $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)}$ en fonction de $f^{(n)}(a)$ et de $g^{(n)}(a)$.