U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2011-2012

Feuille d'exercices 3
Intégration

Exercice 1

1. On considère la fonction $F(x) = \ln|x + \sqrt{x^2-1}|$. Préciser ses intervalles de définition et calculer sa dérivée sur ces intervalles.
2. En déduire l'intégrale $\displaystyle\int_{-\frac{5}{3}}^{-\frac{5}{4}} \frac{dt}{\sqrt{t^2-1}}$.

Exercice 2
Calculer les primitives suivantes :

$$\int \sin^3\theta\,\cos\theta\,d\theta\,; \quad \int \sqrt{1-x^2}\,dx\,; \quad \int x\sqrt{1+x^2}\,dx\,;$$
$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx\,; \quad \int \frac{\sin 2u}{1+\cos^2 u}\,du\,; \quad \int \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{x+\sin x}\,dx\,;$$
$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t+1}}\,.$$

Exercice 2
Préciser les intervalles de définition des primitives qui suivent et les calculer au moyen d'un changement de variables. De même, calculer au moyen d'un changement de variables les intégrales définies qui suivent :

$$\int \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{x=1}^{e} \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx \quad (\alpha \in \mathbb{R}_+)$$
$$\int \frac{dx}{x\,(ax^n+b)} \quad \left(b \neq 0,\ \text{avec } t = \frac{1}{x}\right)$$
$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^{0} \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad (-1 < x < 1).$$

Exercice 3
Mêmes questions que dans l'exercice précédent. (On utilisera entre autres des changements de variables linéaires) :

$$\int \frac{x\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}} \quad \text{et} \quad \int_0^1 \frac{x\,dx}{\sqrt{3+2x-x^2}}.$$
$$\int \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{\frac{3}{2}}} \quad \text{et} \quad \int_1^2 \frac{dx}{(x^2-2x+4)^{\frac{3}{2}}}$$
$$\int \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \quad \text{et} \quad \int_{\frac{a}{2}}^{a} \frac{dx}{\sqrt{2ax-x^2}} \quad (a>0 \text{ puis } a<0).$$

Exercice 4
Calculer les primitives

$$\int \sin^2\theta\,d\theta; \quad \int \cos^4\theta\,d\theta \quad \int \sin^3\theta\,d\theta.$$

Exercice 5
En posant $s = \sqrt{t}$, montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt$$

existe et la transformer en l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$.

Exercice 6
Calculer $I = \displaystyle\int_0^\pi \frac{dx}{1+\sin^2 x}$. (On utilisera le changement de variable $t = \tan x$).

Exercice 7
Étudier la nature des intégrales ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\sqrt[3]{x}}\,; \quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)}\,; \quad \int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\,; \quad \int_0^\pi \frac{\sin x}{[x\,(\pi-x)]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,;$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\ln(1+x)}\left(\frac{x}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^\alpha dx.$$

Exercice 8
Étudier la convergence éventuelle des intégrales suivantes ($\alpha \in \mathbb{R}$) :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x\,dx}{x^4+1} \ \text{(la calculer)}\,; \qquad \int_0^\infty e^{-x}\ln x\,dx$$
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}\,dx\,; \qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x^\alpha}\,dx.$$

Exercice 9
Montrer par récurrence qu'on a $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx = n!$.

Exercice 10

1. Montrer que $\int_0^1 \ln x \, dx$ est convergente.
2. En déduire que les intégrales

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \sin x \, dx \quad J = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln \cos x \, dx$$
$$K = \int_0^{\pi} \ln \sin x \, dx$$

   ont un sens. Établir les relations :

$$\begin{cases} I = J = \frac{1}{2}K \\ I + J = \frac{1}{2}K - \frac{\pi}{2}\ln 2 \end{cases}$$

   En déduire les valeurs de I, J et K.

Exercice 11

Démontrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$ et $J = \displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\ln x}{1+x^2}\, dx$ ont un sens et vérifier que $J = -I$.

Exercice 12

Montrer que $\displaystyle\int_1^{\infty} \frac{\cos x}{x^2}\, dx$ est absolument convergente. En déduire que $\displaystyle\int_0^{\infty} \frac{\sin x}{x}\, dx$ converge.