U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2011-2012

Feuille d'exercices 4
Séries numériques

Exercice 1
Les séries suivantes peuvent-elles être convergentes ?

$$\text{a. } \sum \frac{p^2-p+1}{p^2+p+2} \qquad \text{b. } \sum \cos\frac{1}{p} \qquad \text{c. } \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$$

Exercice 2
Expliciter les sommes partielles S_n des séries suivantes, en déduire la nature de leur convergence et leur somme éventuelle :

$$\text{a. } \sum \frac{1}{p(p+1)} \qquad \text{b. } \sum (-1)^p \qquad \text{c. } \sum \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

La condition $u_p \to 0$ est-elle suffisante pour qu'une série converge ?

Exercice 3
En utilisant le fait que la somme de deux séries convergentes est convergente, montrer que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est nécessairement divergente.

Exercice 4
Donner les sommes partielles $S_n(x)$ et la somme $S(x)$ si elle existe de la série géomtrique de terme général $u_k = x^k$, pour $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ et $x = 2$.

Exercice 5
Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la série de terme général $v_n = nx^n$. Montrer qu'elle diverge pour $|x| \geq 1$. En utilisant une dérivation, calculer les sommes partielles $S_n(x)$. Montrer qu'on a convergence (resp. divergence) pour $|x| < 1$ (resp. pour $|x| \geq 1$) et donner la somme $S(x)$ lorsqu'elle existe.

Exercice 6
Soit f est une fonction continue qui, pour $x > N$, est positive en décroissant vers 0. Soit la suite $u_p = f(p)$.
a. Montrer graphiquement les inégalités

$$\sum_{p=N+1}^{N+n} u_p \leq \int_N^{N+n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{p=N}^{N+n-1} u_p.$$

b. En déduire que $\sum u_n$ et $\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ sont alors de même nature.

Application : nature des séries $u_p = \frac{1}{p\ln^\beta p}$? (Séries de Bertrand).

Exercice 7
Utiliser le théorème de comparaison pour étudier la nature des séries de terme général :

$$\text{a. } \sin^2\frac{x}{n}\ ,\ x \in \mathbb{R} \qquad \text{b. } \sin\left(\frac{2}{3}\right)^n$$

$$\text{c. } \sqrt{\frac{\ln n}{n}} \qquad \text{d. } \frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}.$$

Exercice 8
Donner la nature des séries de terme général :

$$\text{a. } \frac{2n+1}{n^3-n+2} \qquad \text{b. } \ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right),\ \alpha > 0$$

$$\text{c. } \frac{1}{n(n-\ln n)} \qquad \text{d. } \frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}.$$

Exercice 9
Soit la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\left(1+(\frac{4}{5})^n\right)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}(\frac{4}{5})^n}.$$

Préciser sa nature.

Exercice 10
On pose $a_p = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p} - \ln p$ avec $p \geq 1$. Soit la série de terme général $u_p = a_p - a_{p-1}$. Trouver ℓ tel que $u_p = \frac{\ell}{p^2}\bigl(1+\varepsilon(p)\bigr)$ $(p \to \infty)$. En déduire que la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge lorsque $n \to \infty$ (sa limite est appelée *constante d'Euler*).

Exercice 11
Donner la nature des séries ci-dessous ($a > 0$), en utilisant les critères de Cauchy ou de d'Alembert :

$$\text{a. } u_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{b. } u_n = \frac{n\ln n}{2^n} \quad \text{c. } u_n = \left(a-\frac{1}{n}\right)^n,\ a > 0.$$

Exercice 12
Étudier la convergence des séries ci-dessous, en précisant dans chaque cas s'il y a convergence absolue :

$$\text{a. } u_n = \frac{\sin n}{n^3} \quad \text{b. } u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$$
$$\text{c. } u_n = e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1 \quad \text{d. } u_n = \frac{(-1)^n n + 2}{n^2+1}$$
$$\text{e. } u_n = (-1)^n \tan\frac{1}{n} \quad \text{f. } u_n = \frac{1}{2^n}\sin n\theta.$$

Exercice 13
Étudier, suivant la valeur du paramètre $\alpha > 0$, la convergence des séries numériques de terme général $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ $(n \geq 1)$.

Exercice 14
a. En utilisant la formule de Taylor, rappeler pourquoi on a $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!} = e$.
b. En utilisant ce résultat, calculer :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n+1}{n!} \quad \text{et} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^2-1}{n!}.$$

Exercice 15
Soit la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $(n \geq 0)$.

a. Montrer que (u_n) est convergente.

b. En utilisant le théorème de la moyenne, montrer que u_n n'est pas absolument convergente. En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 16
Soit la série $\sum \frac{(-1)^p}{p+(-1)^p}$. Le théorème des séries alternées lui est-il applicable ? L'étudier en groupant deux termes consécutifs.

Exercice 17
Soit la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$. Exprimer u_n en fonction de u_0. En déduire la somme

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p.$$