U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2011-2012

Feuille d'exercices 6
Calcul matriciel et réduction

Exercice 1
Calculer par des méthodes adaptées les inverses des matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \ a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f(e_1) = -e_2$ et $f(e_2) = e_1 - 2e_2$ où $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
1. Expliciter $A = M_{\mathcal{C}}(f)$.
2. Soit $\mathcal{B}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donner la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Calculer $B = M_{\mathcal{B}}(f)$, en utilisant la matrice de passage P.
3. Calculer B^2, B^3 puis B^n ($n \in \mathbb{N}$) par récurrence. En déduire A^n.
4. Expliciter

$$f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ f^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \ f^n(e_1) \text{ et } f^n(e_2),$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel rapporté à la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ et soit f dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $f(e_1) = -e_2$ et $f(e_2) = -e_1$.
1. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.
2. Diagonaliser A.

Exercice 4
Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit la matrice

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

1. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour A.
2. Diagonaliser A. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5
Diagonaliser la matrice

$$A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -7 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Exercice 6
On considère la matrice $A = \left(\begin{smallmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{smallmatrix}\right)$.
1. Calculer $A^2 - 3A + I$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
2. Pour $n \geq 3$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
3. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 7
Soient (u_n) et (v_n) les suites réelles définies par récurrence par les formules

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

1. Pour tout n entier, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
2. En utilisant une récurrence, exprimer X_n en fonction de X_0 et de A.
3. Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$.
3. Donner une expression de u_n et de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 8

Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

1. Écrire M sous la forme $M = I_3 + N$ où $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
2. Calculer N^2, N^3 puis N^n pour tout $n \geq 4$.
3. En déduire l'expression de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.
4. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & y_n \\ y_{n+1} & = & -3x_n + 2y_n - 2z_n \\ z_{n+1} & = & x_n - y_n + z_n \end{array} \right.$$

En utilisant les questions précédentes, donner les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de l'entier n.

Exercice 9

Soit f l'endomorphisme de $\mathbb{R}^3$ dont la matrice dans la base canonique est

$$M = \begin{pmatrix} 2 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & -1 \\ -1 & -1 & 2 \end{pmatrix}.$$

1. Déterminer $\operatorname{Ker} f$ et $\operatorname{Im} f$. Montrer que ce sont deux sous-espaces vectoriels supplémentaires de $\mathbb{R}^3$.

2. Construire une base de $\mathbb{R}^3$ qui soit la réunion d'une base de $\operatorname{Ker} f$ et d'une base de $\operatorname{Im} f$. Donner la matrice de f dans cette nouvelle base.

3. Montrer que f est la composée de deux endomorphismes simples de $\mathbb{R}^3$.