Institut Galilée **2010-2011**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale I

Feuille de TD 1 : Rappels de calcul intégral

Exercice 1

Existe-t-il une fonction g intégrable sur $\mathbb{R}$ telle que, pour tout $n \in \mathbb{N}$ et tout $x \in \mathbb{R}$, $n\mathrm{e}^{-n|x|} \leq g(x)$?

Exercice 2

Soit $f \in L^1(\mathbb{R})$. On considère l'application

$$Tf \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & \int_0^1 f(x-y)\mathrm{d}y \end{array}.$$

1. Montrer que si f est continue à support compact, Tf est continue.

2. Soit $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Montrer que $(Tf_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge vers Tf uniformément sur $\mathbb{R}$. En déduire que Tf est continue sur $\mathbb{R}$.

3. En déduire que le produit de convolution sur $L^1(\mathbb{R})$ n'admet pas d'élément unité.

Exercice 3

Soit $h \in \mathbb{R}^n$. On définit l'opérateur de translation par h, noté τ_h, agissant sur une fonction $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, par : $\forall x \in \mathbb{R}^n,\ (\tau_h f)(x) = f(x-h)$.

Le but de cet exercice est de démontrer le résultat suivant.
Si $f \in L^p(\mathbb{R}^n)$ avec $1 \leq p < +\infty$, alors

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0,$$

i.e. $\tau_h f$ tend vers f dans $L^p(\mathbb{R}^n)$ lorsque h tend vers 0.

Soit $1 \leq p < +\infty$.
1. Montrer que, si f est continue à support compact dans la boule $B(0,M)$ centrée en 0 et de rayon M, et si $|h| \leq 1$, alors

$$\forall x \in \mathbb{R}^n,\ |f(x-h) - f(x)|^p \leq \mathbf{1}_{B(0,M+1)}(x) 2^p \|f\|_\infty^p,$$

où $B(0,M+1)$ est la boule centrée en 0 de rayon $M+1$.

2. En déduire que, pour f continue à support compact, on a

$$\lim_{h\to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0.$$

3. Démontrer le résultat énoncé plus haut pour une fonction quelconque dans $L^p(\mathbb{R}^n)$, $1 \leq p < +\infty$.

4. Que se passe-t-il pour $p = \infty$?

Exercice 4

Soient I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$ et $f \in L^1_{\mathrm{loc}}(I)$. On suppose que :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(I),\ \int_I f(x)\varphi(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

Soit $[a,b] \subset I$ un intervalle.

1. En utilisant un argument de densité, montrer que :

$$\forall g \in C_0(I),\ \text{supp}\ g \subset [a,b],\ \int_{[a,b]} f(x)g(x)\,\mathrm{d}x = 0.$$

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $h_\varepsilon \in C_0(]a,b[)$ telle que

$$\int_{[a,b]} |f(x) - h_\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon.$$

Montrer que :

$$\forall g \in C_0(]a,b[),\ \left| \int_{[a,b]} h_\varepsilon(x) g(x)\,\mathrm{d}x \right| \leq \varepsilon ||g||_\infty.$$

3. En choisissant bien $g \in C_0(]a,b[)$, montrer que $\int_{[a,b]} |h_\varepsilon|\,\mathrm{d}x \leq \varepsilon$.

4. En déduire que $f = 0$ presque partout sur I.