Institut Galilée **2010-2011**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale I

Feuille de TD 2 : Distributions - Exemples, ordre et support.

Exercice 1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que les expressions suivantes définissent des distributions dont on déterminera l'ordre et le support :

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2)\,\mathrm{d}x, \qquad \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x)e^{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 2

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$\int_0^{+\infty} \varphi'(x)\log(x)\,\mathrm{d}x.$$

2. Soit φ_n une fonction plateau valant 1 sur $[\frac{1}{n}, 1]$ et dont le support est inclus dans $[\frac{1}{2n}, 2]$.
a. Minorer $< T, \varphi_n >$.
b. En déduire que T est une distribution d'ordre exactement 1.
3. Déterminer le support de T.

Exercice 3

Soit $I \subset \mathbb{R}$ un intervalle ouvert et soit $x_0 \in I$. Montrer qu'il n'existe pas de fonction $f \in L^1_{\text{loc}}(I)$ telle que $T_f = \delta_{x_0}$.
Indication : on pourra utiliser le résultat de l'exercice 4 de la Feuille 1.

Exercice 4 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.
1. Montrer qu'il existe $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.
2. Montrer que la limite

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x}\,\mathrm{d}x$$

existe.
3. Montrer que cette expression définit une distribution d'ordre au plus 1, appelée *valeur principale de* $\frac{1}{x}$ et notée $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$.
4. En considérant φ_n comme à l'exercice 2, montrer que $\mathrm{vp}(\frac{1}{x})$ est d'ordre exactement 1.

Exercice 5

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$.
1. Montrer que l'expression suivante définit une distribution T d'ordre au plus 1 :

$$< T, \varphi >= \int_0^\infty \left(\varphi(1/t^2, \sin t) - \varphi(0, \sin t)\right)\,\mathrm{d}t.$$

2. Calculer le support de T.

Exercice 6 - Distribution d'ordre infini

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que l'expression

$$< T, \varphi >= \sum_{p=0}^\infty \varphi^{(p)}(p)$$

définit une distribution sur $\mathbb{R}$, d'ordre infini.

Exercice 7 - Partie finie de x^α

Soient $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\varepsilon > 0$.
1. Pour $\alpha \in]-2, -1[$, montrer que :

$$\int_\varepsilon^\infty x^\alpha \varphi(x)\,\mathrm{d}x = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$$

où $A_\varphi \in \mathbb{R}$ ne dépend pas de ε et où R_ε tend vers une limite lorsque ε tend vers 0^+.
2. On pose : $< \mathrm{pf}(x^\alpha), \varphi >= \lim_{\varepsilon\to 0^+} R_\varepsilon$. Montrer que $\mathrm{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

Exercice 8

Soit T une distribution sur $\mathbb{R}^n$ et f une fonction de classe C^∞ sur $\mathbb{R}^n$, à valeurs dans $\mathbb{R}$.
1. Montrer que, si $fT = 0$, alors le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\}$.
2. On suppose de plus que T est d'ordre 0. Montrer qu'alors la réciproque est vraie : si le support de T est inclus dans l'ensemble $Z(f) = \{x \in \mathbb{R}^n,\ f(x) = 0\}$ alors $fT = 0$.
3. En prenant $T = \delta'$, montrer que la réciproque est fausse en général si T n'est pas d'ordre 0.
4. Caractériser les fonctions f de classe C^∞ sur $\mathbb{R}$ telles que $f\delta' = 0$.

Exercice 9

Soit T une distribution sur $\mathbb{R}$ telle que supp $T = \{0\}$.

1. Justifier que T est d'ordre fini. On notera m son ordre dans la suite.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\varphi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0. Soit ρ une fonction plateau valant 1 au voisinage de 0 et 0 hors de $]-1,1[$. On note, pour $r > 0$ et $x \in \mathbb{R}$, $\rho_r(x) = \rho(x/r)$.

a. Montrer que, si $l \leq m$, alors

$$\lim_{r \to 0} \sup_{|x| \leq r} |(\rho_r \varphi)^{(l)}(x)| = 0.$$

b. En déduire que $< T, \varphi >= 0$.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Montrer que φ s'écrit,

$$\forall x \in \mathbb{R},\ \varphi(x) = \sum_{k=0}^{m} \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \psi(x),$$

où ψ est une fonction de classe C^∞ vérifiant $\psi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0.

4. En déduire l'existence de nombres complexes $a_0, \ldots, a_m$ tels que, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$,

$$< T, \varphi >= \sum_{k=0}^{m} a_k \varphi^{(k)}(0),$$

soit encore,

$$T = \sum_{k=0}^{m} a_k \delta_0^{(k)}.$$