Feuille de TD 4 : Équations aux dérivées partielles.

Exercice 1

Soit h un C^1 -difféomorphisme de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Soit T l'application linéaire de $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ dans $\mathbb{C}$ définie par :

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2), \langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x, h(x)) dx.$$

1. Montrer que $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$. Quel est son ordre ?
2. Déterminer le support de T .
3. En déduire qu'il n'existe pas de fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ telle que T soit la distribution associée à cette fonction.
4. Calculer, au sens des distributions, $(\partial_x + h'(x)\partial_y)T$.

Exercice 2 - Équation de Laplace

Soit $d \geq 1$. On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^d)$ donnée par la fonction localement intégrable :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d, E(x) = \begin{cases} x_+ = \max(x, 0) & \text{si } d = 1 \\ \frac{1}{2\pi} \log |x| & \text{si } d = 2 \\ -\frac{1}{(d-2)\sigma(S^{d-1})} \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si } d \geq 3 \end{cases},$$

où $\sigma(S^{d-1})$ désigne l'aire de la sphère unité de $\mathbb{R}^d$.

1. Pour $d = 1$, vérifier que $E'' = \delta_0$.
2. On suppose dans la suite $d \geq 2$. Soit $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2 et soit $F \in C^2(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ définie par : $\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, F(x) = f(|x|)$. Montrer que :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, \Delta F(x) = f''(|x|) + \frac{d-1}{|x|} f'(|x|).$$

3. Résoudre sur $\mathbb{R}_+^*$ l'équation différentielle :

$$f''(r) + \frac{d-1}{r} f'(r) = 0.$$

4. Soit $F: \mathbb{R}^d \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{R}$ la fonction localement intégrable donnée par :

$$\forall x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}, F(x) = \begin{cases} \log |x| & \text{si } d = 2 \\ \frac{1}{|x|^{d-2}} & \text{si } d \geq 3 \end{cases}.$$

Soit $\varepsilon > 0$ et soit Ω_ε l'ouvert $\mathbb{R}^d \setminus B(0, \varepsilon)$. Soit enfin $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^d)$. En appliquant la formule de Green à F et φ sur l'ouvert Ω_ε , puis en faisant tendre ε vers 0, calculer $\langle \Delta F, \varphi \rangle$.

5. En déduire que $\Delta E = \delta_0$, pour tout $d \geq 2$.
6. On admet le théorème de Liouville (version faible) : Soit $u \in C^\infty(\mathbb{R}^d \setminus \{0\})$ telle que $\Delta u = 0$. Si $u(x)$ tend vers 0 lorsque $|x|$ tend vers l'infini alors u est nulle.
 - a. Soit $\rho \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ une distribution à support compact. Montrer que l'équation $-\Delta V = \rho$ admet une unique solution qui tend vers 0 à l'infini.

- b. Calculer l'expression de cette solution pour $\rho = \delta_0$ (charge unique à l'origine) et pour $\rho = \delta'_{x_0}$ avec $x_0 \neq 0$ (cas du dipôle).

Exercice 3 - Équation de la chaleur

Soit H la fonction indicatrice de $\mathbb{R}_+^*$. On considère la fonction sur $\mathbb{R}^2$ donnée par :

$$\forall (x, t) \in \mathbb{R}^2, E(x, t) = \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}.$$

1. Montrer que E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.
2. Montrer que, pour tout $t > 0$ et tout $x \in \mathbb{R}$,

$$\partial_t \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right) = \partial_{xx}^2 \left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \right).$$

3. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On pose :

$$I_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_t \varphi(x, t) dt dx,$$

et

$$J_\varepsilon = - \int_{\mathbb{R}} \int_{\varepsilon}^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_{xx}^2 \varphi(x, t) dt dx.$$

- a. Calculer $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.
- b. En effectuant le changement de variable $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, déterminer la limite, lorsque ε tend vers 0, de $I_\varepsilon + J_\varepsilon$.

Indication : on pourra utiliser que $\int_{\mathbb{R}} e^{-\frac{u^2}{4}} du = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$.

4. Calculer $(\partial_t - \partial_{xx}^2)E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
5. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial_t u - \partial_{xx}^2 u = f,$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.

6. Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, que peut-on dire de u ?

Exercice 4 - Équation de Cauchy-Riemann

On considère sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$ la fonction donnée par :

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}, f(x, y) = (x + iy)^{-1}.$$

1. Montrer que $f \in L_{loc}^1(\mathbb{R}^2)$.
2. Soit $\bar{\partial}$ l'opérateur de Cauchy-Riemann défini par : $\bar{\partial} = \frac{1}{2}(\partial_x + i\partial_y)$. Calculer $\bar{\partial} f$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Indication : on pensera à effectuer un changement de variables en coordonnées polaires.