

(9)

Devoir maison 1 : Corrigé.

Exercice 1

1. Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a :

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) = \operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{(x+i\varepsilon)\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx$$

Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$, tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$.

Alors :

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) = \int_{-a}^a \frac{x\varphi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx$$

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu) du$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $\operatorname{supp} \psi \subset [-a, a]$. Alors :

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) = \underbrace{\int_{-a}^a \frac{x\varphi(0)}{x^2+\varepsilon^2} dx}_{=0 \text{ par imparité}} + \int_{-a}^a \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) dx$$

On : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \psi(x) \mathbb{1}_{[-a,a]}(x)$

et $\forall \varepsilon > 0, \forall x \in \mathbb{R}$, $\left| \frac{x^2\psi(x)}{x^2+\varepsilon^2} \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \right| \leq |\psi(x)| \mathbb{1}_{[-a,a]}(x) \in L_{bc}^1(\mathbb{R})$.

②

Donc, par le théorème de convergence dominée, on a :

$$\operatorname{Re} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{-a}^a \psi(x) dx = \langle \psi(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$$

Donc la limite existe et vaut $\langle \psi(\frac{1}{x}), \varphi \rangle$.

- Soient $\varepsilon > 0$ et $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$. On a, pour $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$, tel que $\operatorname{supp} \varphi \subset [-a, a]$,

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\varepsilon \varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx = \int_{-a}^a \frac{\varepsilon \varphi(x)}{x^2 + \varepsilon^2} dx$$

Si on pose $y = x/\varepsilon$, alors $dx = \varepsilon dy$ et :

$$\begin{aligned} \operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) &= \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varepsilon \varphi(\varepsilon y)}{(\varepsilon y)^2 + \varepsilon^2} \varepsilon dy = \int_{-a/\varepsilon}^{a/\varepsilon} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} dy \\ &= \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-a/\varepsilon, a/\varepsilon]}(y) dy \end{aligned}$$

$$\text{Or, } \forall \varepsilon > 0, \forall y \in \mathbb{R}, \quad \left| \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-a/\varepsilon, a/\varepsilon]}(y) \right| \leq \frac{\|\varphi\|_\infty}{1+y^2} \in L^1(\mathbb{R})$$

$$\text{et } \forall y \in \mathbb{R}, \quad \frac{\varphi(\varepsilon y)}{1+y^2} \mathbb{1}_{[-a/\varepsilon, a/\varepsilon]}(y) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \frac{\varphi(0)}{1+y^2}$$

Par le théorème de convergence dominée :

$$\operatorname{Im} \left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx \right) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(0)}{1+y^2} dy = \pi \varphi(0) = \pi \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Donc la limite existe et vaut $\pi \langle \delta_0, \varphi \rangle$.

2. On en déduit que l'expression $\langle T, \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x-i\varepsilon} dx$ est bien définie et vaut :

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle \psi(\frac{1}{x}), \varphi \rangle + i\pi \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Soit encore $T = \psi(\frac{1}{x}) + i\pi \delta_0$ qui est une distribution d'ordre 1.

③

Exercice 2:

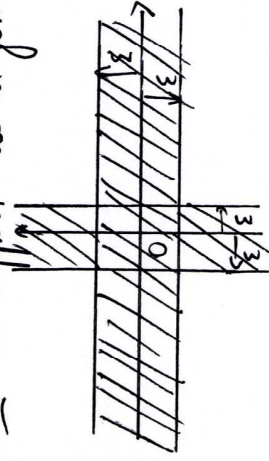
1. On a:

$$\iint_{\substack{|x|>1 \\ |y|<1}} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} dx dy \leq \iint_{\substack{|x|>1 \\ |y|<1}} \frac{dx dy}{x^2+y^2} \leq \int_{|y|<1} \left(\int_{|x|>1} \frac{dx}{x^2} \right) dy = 8 < +\infty$$

Donc l'intégrale double est absolument convergente.

$$\text{Soit } A = \iint_{\substack{|x|>1 \\ |y|<1}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} dx dy.$$

2. a. Le support de la fonction $(x, y) \mapsto \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ est l'ensemble hachuré:



$$\{|x|>\varepsilon \text{ et } |y|<\varepsilon\} \cup \{|x|<\varepsilon \text{ et } |y|>\varepsilon\}$$

On fixe $\varepsilon > 0$. On a pour toute $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$;

$$\iint_{\mathbb{R}^2} \left(\frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \theta(x, y) \right) dx dy \leq \| \theta \|_\infty \left(\iint_{\substack{|x|>\varepsilon \\ |y|<\varepsilon}} \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx dy + \iint_{\substack{|x|<\varepsilon \\ |y|>\varepsilon}} \left| \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \right| dx dy \right)$$

On effectue le changement de variable $x = \varepsilon x'$ et $y = \varepsilon y'$. Alors:

$$\iint_{\substack{|x|>\varepsilon \\ |y|<\varepsilon}} \frac{|x^2-y^2|}{(x^2+y^2)^2} dx dy = \iint_{\substack{|x'|>1 \\ |y'|<1}} \frac{|(x')^2-(y')^2|}{(x'^2+y'^2)^2} \varepsilon^2 dx' dy' < +\infty \text{ par 1.}$$

De même pour la seconde intégrale par symétrie. Donc pour $\varepsilon > 0$ fixé, l'intégrale I_ε est absolument convergente et on peut écrire:

$$\begin{aligned} I_\varepsilon &= \iint_{\substack{|x|>\varepsilon \\ |y|<\varepsilon}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \theta(x, y) dx dy - \iint_{\substack{|x|<\varepsilon \\ |y|>\varepsilon}} \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2} \theta(x, y) dx dy \\ &= \iint_{\substack{|x'|>1 \\ |y'|<1}} \frac{x'^2-y'^2}{(x'^2+y'^2)^2} \theta(\varepsilon x', \varepsilon y') \varepsilon^2 dx' dy' - \iint_{\substack{|x'|<1 \\ |y'|>1}} \frac{x'^2-y'^2}{(x'^2+y'^2)^2} \theta(\varepsilon x', \varepsilon y') \varepsilon^2 dx' dy' \end{aligned}$$

④

On, d'après 1, on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour

donc: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon} = \mathcal{O}(0,0)A - \mathcal{O}(0,0)A'$

avec $A' = \iint_{|y'| > 1} \frac{x'^2 - y'^2}{(x'^2 + y'^2)^2} dx' dy' = \iint_{|x''| > 1} \frac{(y'')^2 - (x'')^2}{(x'')^2 + (y'')^2} dx'' dy'' = -A$
 en posant $|y''| < 1$, $|x''| < 1$
 $x'' = y'$, et $y'' = x'$

Ainsi: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} I_{\varepsilon} = 2A \mathcal{O}(0,0).$

b. On a: $\forall \varepsilon > 0, I_{\varepsilon} = \iint_{|x| > \varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathcal{O}(x, y) dx dy = \iint_{|y| > \varepsilon} \frac{y^2 - x^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathcal{O}(y, x) dx dy$

D'où: $\forall \varepsilon > 0, I_{\varepsilon} = \frac{1}{2} \iint_{\mathbb{R}^2} (1_{|x| > \varepsilon} - 1_{|y| > \varepsilon}) \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \mathcal{O}(x, y) dx dy = \frac{1}{2} I_{\varepsilon}.$
 car $\mathcal{O}(x, y) = \mathcal{O}(y, x)$

Donc I_{ε} converge lorsque ε tend vers 0 et: $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} I_{\varepsilon} = A \mathcal{O}(0,0).$

3. On a: $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, \mathcal{O}(x, y) - \mathcal{O}(0,0) = \int_0^1 \frac{d}{dt} \mathcal{O}(tx, ty) dt$

$= \int_0^1 \left(x \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x}(tx, ty) + y \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial y}(tx, ty) \right) dt$

En passant au module, il vient:

$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2, |\mathcal{O}(x, y) - \mathcal{O}(0,0)| \leq \int_0^1 |x| \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x}(z) \right| + |y| \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial y}(z) \right| dt$
 $\leq |x| \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial x}(z) \right| + |y| \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \left| \frac{\partial \mathcal{O}}{\partial y}(z) \right|.$

⑤ 4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\theta \equiv 1$ au voisinage du support de φ et vérifiant : $\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2$, $\theta(x, y) = \theta(y, x)$. Alors :

$$\forall \varepsilon > 0, \iint_{|x| > \varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \varphi(x, y) dx dy = \iint_{|x| > \varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} (\varphi \theta)(x, y) dx dy$$

$$= \varphi(0,0) \underbrace{\iint_{|x| > \varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \theta(x, y) dx dy}_{\overline{J_\varepsilon}} + \underbrace{\iint_{|x| > \varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} (\varphi(x, y) - \varphi(0,0) \theta(x, y)) dx dy}_{K_\varepsilon}$$

Par 2.b. $\overline{J_\varepsilon} \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0^+} A \theta(0,0)$. Puis, par 3.

$$|K_\varepsilon| \leq \iint_{|x| > \varepsilon} \left| \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} \right| |\varphi(x, y) - \varphi(0,0)| |\theta(x, y)| dx dy \leq C \iint_{|x| > \varepsilon} \frac{|\theta(x, y)|}{(x^2 + y^2)^{3/2}} dx dy \left(\left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \right\| + \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| \right) \leq +\infty \text{ car } \theta \in C_0^\infty$$

Donc, par convergence dominée, K_ε converge vers une limite $K_0(\varphi)$ vérifiant :

$$|K_0(\varphi)| \leq C \sum_{|a| \leq 1} \sup_{z \in \mathbb{R}^2} |\partial^a \varphi(z)| \quad \text{avec } C \text{ une constante qui ne dépend que de } \theta. \text{ Alors :}$$

$$\langle T, \varphi \rangle = A \theta(0,0) \langle \delta_0, \varphi \rangle + K_0(\varphi)$$

Si on fixe un compact K de $\mathbb{R}^2$, soit $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\theta \equiv 1$ au voisinage de K et $\theta(x, y) = \theta(y, x)$ pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. On obtient alors $C > 0$ tel que l'inégalité :

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \sum_{|a| \leq 1} \sup_{z \in \mathbb{R}^2} |\partial^a \varphi(z)|$$

soit valable pour tout $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ vérifiant $\text{supp } \varphi \subset K$.

Donc T est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.

(Il est évident que T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$).