

①

Devoir maison 2 : Correction.

Exercice 1:

1. Comme l'équation différentielle $2xu' - u = 0$ est singulière en 0, on cherche ses solutions localement intégrables sur $\mathbb{R}_+^*$ et sur $\mathbb{R}_-^*$.

Sur $\mathbb{R}_+^*$ on trouve comme solutions : $u(x) = C_1 \sqrt{x}$

Sur $\mathbb{R}_-^*$ on trouve comme solutions : $u(x) = C_2 \sqrt{x}$.

On note $x_4 = \max(x, 0)$ et $x_- = \max(-x, 0)$.

Les fonctions localement intégrables $u: x \mapsto C_1 \sqrt{x_4} + C_2 \sqrt{x_-}$ sont donc solutions de $2xu' - u = 0$.

2. Les distributions associées aux fonctions $u: x \mapsto C_1 \sqrt{x_4} + C_2 \sqrt{x_-}$ sont solutions de $2xT' - T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Puis, soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$. Soit $S_1 = \frac{T_1}{\sqrt{x}}$.

$$\text{Alors : } S_1' = \frac{T_1'}{\sqrt{x}} - \frac{T_1}{2x\sqrt{x}} = \frac{2xT_1' - T_1}{2x\sqrt{x}} = 0$$

Comme S_1 est définie sur un intervalle (ouvert), il existe $C_1 \in \mathbb{R}$ telle que $S_1 = C_1$. D'où $T_1 = C_1 \sqrt{x_4}$.

De même : $T_2 = C_2 \sqrt{x_-}$.

②

b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_+^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$
 $= \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - 0$
 $= 0$

Et si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}_-^*)$, $\langle S, \varphi \rangle = \langle T, \varphi \rangle - \langle T_1, \varphi \rangle - \langle T_2, \varphi \rangle$
 $= \langle T_2, \varphi \rangle - 0 - \langle T_2, \varphi \rangle$
 $= 0$.

Donc $\mathbb{R}_+^* \subset (\text{supp } S)^\circ$ et $\mathbb{R}_-^* \subset (\text{supp } S)^\circ$, donc $\text{supp } S \subset \mathbb{R}_- \cup \text{supp } S \subset \mathbb{R}_+$.

Donc : $\text{supp } S \subset \{0\}$.

c. Soit $R = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)}$, $a_k \in \mathbb{C}$. Si $R=0$ dans $2\alpha R' - R = 0$.

Réciproquement, supposons que $2\alpha R' - R = 0$ et montrons que $R=0$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $k \geq 1$:

$$\begin{aligned} \langle 2\alpha (\delta^{(k)})', \varphi \rangle &= -\langle \delta^{(k)}, (2\alpha \varphi)' \rangle \\ &= -\langle \delta^{(k)}, 2\varphi \rangle - \langle \delta^{(k)}, 2\alpha \varphi' \rangle \\ &= 2(-1)^{k+1} (2\varphi^{(k)}(0) + (2\alpha \varphi)^{(k)}(0)) \\ &= 2(-1)^{k+1} (k+1) \varphi^{(k)}(0) \end{aligned}$$

$$\text{Donc } 2\alpha R' - R = \sum_{k=0}^p (2(-1)^{k+1}(k+1) - 1) a_k \delta^{(k)}$$

Or $2\alpha R' - R = 0$, donc $a_k = 0$ pour tout k et $R=0$.

d. Comme par b, $\text{supp } S \subset \{0\}$, S s'écrit $S = \sum_{k=0}^p a_k \delta^{(k)}$.

Si T est solution de $2\alpha T' - T = 0$, alors S aussi et donc par c, $S=0$.

Ainsi, $T = T_1 + T_2 = C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-}$ sont les solutions de $2\alpha T' - T = 0$.

2. La forme du second membre f_0 nous incite à chercher une solution particulière qui soit combinaison linéaire de dérivées de masses de Dirac en 0. Or, par c, il suffit de prendre une masse de Dirac en 0 et en injectant cette distribution $a_0 \delta_0$ dans l'équation, on en tire: $(2(-1)^{(1)} - 1) a_0 = 1$ soit $a_0 = -1/3$.

③

Donc les solutions de l'équation différentielle $2xT' - T = \delta_0$ sont les

$$C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-} - \frac{1}{3} \delta_0.$$

3. On note $T_0 = C_1 \sqrt{x_+} + C_2 \sqrt{x_-} - \frac{1}{3} \delta_0$. Soit $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Alors $T_0 * f$ est solution de $2xT' - T = f$.

$$\text{En effet: } 2x(T_0 * f)' - T_0 * f = 2xT_0' * f - T_0 * f = (2xT_0' - T_0) * f = \delta_0 * f = f.$$

$$\text{Et } T_0 * f = C_1 \sqrt{x_+} * f + \underbrace{C_2 \sqrt{x_-} * f}_{\text{convolution des fonctions}} - \frac{1}{3} f$$

Exercice 2:

1. Soit $t \neq 0 [2\pi]$. Alors: $\sum_{k=-N}^N e^{ikt} = e^{-iNt} + \dots + 1 + \dots + e^{iNt}$

$$= e^{-iNt} [1 + \dots + e^{2iNt}]$$

$$= e^{-iNt} \frac{e^{i(2N+1)t} - 1}{e^{it} - 1}$$

$$= \underbrace{e^{-iNt} e^{i\frac{(2N+1)t}{2} - it\frac{1}{2}}}_{=1} \frac{e^{i\frac{(2N+1)t}{2}} - e^{-i\frac{(2N+1)t}{2}}}{e^{it\frac{1}{2}} - e^{-it\frac{1}{2}}}$$

$$= \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}$$

$$\text{Donc: } \forall t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}, F_N(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin\frac{t}{2}}.$$

(4)

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Alors, pour tout $N \in \mathbb{N}$,

$$\langle T_N, \varphi \rangle = \int_{-(2M+1)\pi}^{(2M+1)\pi} F_N(t) \varphi(t) dt = \sum_{m=-M}^M \int_{2m\pi-\pi}^{2m\pi+\pi} F_N(t) \varphi(t) dt$$

$$\xrightarrow{M=t+2M\pi} = \sum_{m=-M}^M \int_{-\pi}^{\pi} F_N(u) \varphi(u-2m\pi) du$$

par 2π périodicité de F_N

$$= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} \underbrace{\sum_{m=-M}^M \varphi(u-2m\pi)}_{=\varphi(u)} du$$

3. On écrit $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$, $\psi \in C^\infty(\mathbb{R})$. D'où :

$$\forall N \in \mathbb{N}, \quad \langle T_N, \varphi \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} dt + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \psi(t) \sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right) dt$$

Or, $t \mapsto \frac{t}{\sin \frac{t}{2}} \psi(t) \in L^1([-\pi, \pi])$, donc par Riemann-Lebesgue la seconde intégrale tend vers 0. lorsque N tend vers l'infini.

D'autre part :

$$\frac{\phi(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin\left(\frac{2N+1}{2}t\right)}{\sin \frac{t}{2}} dt = \frac{\phi(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} F_N(t) dt = \frac{\phi(0)}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \sum_{k=-N}^N e^{ikt} dt$$

$$= \frac{\phi(0)}{2\pi} \times 2\pi = \phi(0)$$

$$\text{Donc : } \langle T_N, \varphi \rangle \xrightarrow{N \rightarrow +\infty} \phi(0) = \sum_{k=-M}^M \varphi(2k\pi) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \varphi(2k\pi)$$

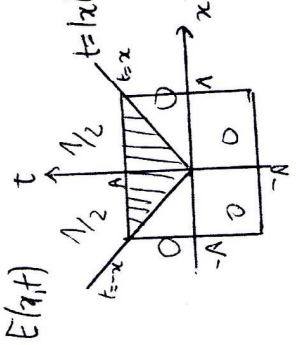
$$= \left\langle \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}, \varphi \right\rangle.$$

Donc $(T_N)_{N \in \mathbb{N}}$ converge vers $\sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

On en déduit la formule de Poisson :

$$\sum_{m \in \mathbb{Z}} e^{inx} = 2\pi \sum_{m \in \mathbb{Z}} \delta_{2\pi m}.$$

(5)

Exercice 3:

$E(x, t)$ $t=|x|$ $1/2$ $1/2$ $t=x$ $t=-x$ A $-A$ O

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]^2$, $A > 0$. On a:

$$\langle (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) E, \varphi \rangle = \langle E, (\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) \varphi \rangle$$

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^A \int_x^A \partial_{tt}^2 \varphi(x, t) dt dx + \int_{-A}^0 \int_{-x}^0 \partial_{tt}^2 \varphi(x, t) dt dx - \int_0^A \int_{-x}^0 \partial_{xx}^2 \varphi(x, t) dt dx \right]$$

En Fubini

$$= \frac{1}{2} \left[\int_0^A \left(\int_0^A -\partial_t \varphi(x, t) dx + \int_{-A}^0 -\partial_t \varphi(x, -x) dx - \int_0^A \partial_x \varphi(t, t) - \partial_x \varphi(t, -t) dt \right) \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[- \int_0^A \partial_t \varphi(u, u) du - \int_0^A \partial_x \varphi(u, u) du - \int_0^A \partial_t \varphi(-u, u) du + \int_0^A \partial_x \varphi(-u, u) du \right]$$

$$= \frac{1}{2} \left[- \int_0^A \phi_1'(u) du - \int_0^A \phi_2'(u) du \right] \text{ où } \phi_1(u) = \varphi(u, u) \text{ et } \phi_2(u) = \varphi(-u, u)$$

$$= \frac{1}{2} [\phi_1(0) + \phi_2(0)] = \varphi(0, 0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2) E = \delta_0$.

2. Si $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact, $\{\text{supp } E, \text{supp } f\}$ est une paire convolutive et on a :

$$(\partial_{tt}^2 - \partial_{xx}^2)(E * f) = (\partial_{tt}^2 E - \partial_{xx}^2 E) * f = \delta_0 * f = f.$$

Donc $u = E * f$ est solution dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de $\partial_{tt}^2 u - \partial_{xx}^2 u = f$.

3. Comme E est C^∞ sur $\mathbb{R}^2 \setminus \{(t, x) \in \mathbb{R}^2, t=|x|\}$, et que $\{(t, x) \in \mathbb{R}^2 \mid t=|x|\}$ est de mesure nulle, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, alors $E * f$ est C^∞ sur Ω .
Donc $u \in C^\infty(\Omega)$.