

①

Feuille de TD 1 : Rappels de calcul intégral.

Exercice 1 :

Supposons par l'absurde qu'il existe $g \in L^1(\mathbb{R})$ telle que :

$$\forall n \in \mathbb{N}, \forall x \in \mathbb{R}, \quad n e^{-n|x|} \leq g(x).$$

Comme les $x \mapsto n e^{-n|x|}$ sont mesurables et dominées par une fonction intégrable, on peut appliquer le théorème de convergence dominée :

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \int_{\mathbb{R}} n e^{-n|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} \lim_{n \rightarrow +\infty} n e^{-n|x|} dx = \int_{\mathbb{R}} 0 dx = 0.$$

$$\text{Or : } \forall n \in \mathbb{N}, \int_{\mathbb{R}} n e^{-n|x|} dx = \int_{-\infty}^0 n e^{nx} dx + \int_0^{+\infty} n e^{-nx} dx \\ = 1 + 1 = 2.$$

Contradiction.

②

Exercice 2:

1. Soit $f \in C_0(\mathbb{R})$, $\text{supp } f \subset [a, b]$. Alors $f \in L^1(\mathbb{R})$ et pour tout $x \in \mathbb{R}$ fixé, $y \mapsto f(x-y)$ est aussi dans $L^1(\mathbb{R})$.
Donc Tf est bien définie. De plus comme f est continue,

$x \mapsto f(x-y)$ l'est aussi et on a :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \forall y \in [0, 1], |f(x-y)| \leq M \mathbb{1}_{[a-1, b+1]}(y)$$

Or $y \mapsto M \mathbb{1}_{[a-1, b+1]}(y) \in L^1(\mathbb{R})$ et cette majoration est uniforme en x . Par le théorème de continuité sous le signe intégral, Tf est continue.

2. Comme $C_0(\mathbb{R})$ est dense dans $L^1(\mathbb{R})$, pour toute $f \in L^1(\mathbb{R})$, il existe une suite $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de fonctions continues à support compact qui converge vers f dans $L^1(\mathbb{R})$. Alors :

$$\forall x \in \mathbb{R}, |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \int_0^1 |f_n(x-y) - f(x-y)| dy \leq \|f_n - f\|_1.$$

$$\text{Et : } \sup_{x \in \mathbb{R}} |Tf_n(x) - Tf(x)| \leq \|f - f_n\|_1 \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc (Tf_n) converge uniformément vers Tf sur $\mathbb{R}$. Par 1., chaque Tf_n est continue, donc Tf l'est aussi.

3. On a : $Tf = f * \mathbb{1}_{[0,1]}$. Si par l'absurde, il existe $u \in L^1(\mathbb{R})$ telle que : $\forall f \in L^1(\mathbb{R}), f * u = f$, alors :

$Tu = u * \mathbb{1}_{[0,1]} = \mathbb{1}_{[0,1]}$. Mais, par 2., Tu est continue sur $\mathbb{R}$ alors que $\mathbb{1}_{[0,1]}$ ne l'est pas. Contradiction.

③ Exercice 3:

1. Si f est continue à support compact dans la boule $B(0, M)$ et si $|h| \leq 1$, alors:

$$\begin{aligned} \forall x \in \mathbb{R}^m, |f(x-h) - f(x)|^p &\leq (|f(x-h)| + |f(x)|)^p \\ &\leq (2\|f\|_\infty \mathbb{1}_{B(0, M+1)})^p \\ &= \mathbb{1}_{B(0, M+1)} 2^p \|f\|_\infty^p \lesssim_{\text{car } |h| \leq 1} \|f\|_\infty^p. \end{aligned}$$

2. Soit f continue à support compact. Comme f est continue:

$$\lim_{h \rightarrow 0} |f(x-h) - f(x)| = 0.$$

Puis, comme $x \mapsto 2^p \|f\|_\infty^p \mathbb{1}_{B(0, M+1)}(x)$ est dans $L^1(\mathbb{R})$ et domine f , on peut appliquer le théorème de convergence dominée pour obtenir:

$$\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{c}_h f - f\|_p^p = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-h) - f(x)|^p dx = \lim_{h \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^m} |f(x-h) - f(x)|^p dx = \int_{\mathbb{R}^m} 0 dx = 0.$$

3. Soit $p \in [1, +\infty[$ et $f \in L^p(\mathbb{R}^m)$. Comme $\zeta_0(\mathbb{R}^m)$ est dense dans $L^p(\mathbb{R}^m)$ pour la norme $\|\cdot\|_p$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe f_ε continue à support compact telle que $\|f - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$.

$$\begin{aligned} \text{Alors: } \|\tilde{c}_h f - f\|_p &= \|\tilde{c}_h (f - f_\varepsilon) - (f - f_\varepsilon) + \tilde{c}_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &\leq \|\tilde{c}_h (f - f_\varepsilon)\|_p + \|f - f_\varepsilon\|_p + \|\tilde{c}_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &= 2\|f - f_\varepsilon\|_p + \|\tilde{c}_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \\ &\leq 2\varepsilon + \|\tilde{c}_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p. \end{aligned}$$

Comme $f_\varepsilon \in \zeta_0(\mathbb{R}^m)$, par 2., il existe $\delta > 0$ tel que pour $|h| < \delta$, $\|\tilde{c}_h f_\varepsilon - f_\varepsilon\|_p \leq \varepsilon$. Alors: $|h| < \delta \Rightarrow \|\tilde{c}_h f - f\|_p \leq 3\varepsilon$.
Donc: $\lim_{h \rightarrow 0} \|\tilde{c}_h f - f\|_p = 0$.

(4)

4. Le théorème n'est plus vrai pour $p = \infty$. Comme $\zeta_0(\mathbb{R}^m)$ n'est pas dense dans $L^\infty(\mathbb{R}^m)$, on ne peut appliquer la

démonstration que nous avons faite pour $p \in [1, +\infty[$.

En effet, pour $f = 1_{B(0,1)} \in L^\infty(\mathbb{R}^m)$ et pour $h \neq 0$,

$$\text{on a : } \| \zeta_h f - f \|_\infty = 1. \text{ Mais, pour } h = 0 : \| \zeta_0 f - f \|_\infty = 0.$$

Dans ce cas : $\lim_{h \rightarrow 0} \| \zeta_h f - f \|_\infty \neq 0$.

⑤

Exercice 4:

1. L'espace $C_0^\infty(I)$ est dense dans $C_0(I)$ pour la norme infinie.
Plus précisément, soit $g \in C_0(I)$ avec $\text{supp } g \subset [a, b] \subset I$. Alors, il existe une suite $(\varphi_m)_{m \in \mathbb{N}}$, $\varphi_m \in C_0^\infty(I)$ avec $\text{supp } \varphi_m \subset [a', b'] \subset I$, et on peut même prescrire $[a, b] \subset [a', b']$, telle que (φ_m) converge uniformément vers g sur $[a, b]$. Alors:

$$\left| \int_I f(x) (g(x) - \varphi_m(x)) dx \right| \leq \underbrace{\left(\int_{a'}^{b'} |f(x)| dx \right)}_{< \infty \text{ car } f \in L^1_{\text{loc}}(I)} \underbrace{\|g - \varphi_m\|_\infty}_{\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0} \rightarrow 0$$

Or: $\forall m \in \mathbb{N}$, $\int_I f(x) \varphi_m(x) dx = 0$ par hypothèse.

Donc: $\int_{[a, b]} f(x) g(x) dx = \int_I f(x) g(x) dx = 0$.

2. Comme $f \in L^1([a, b])$, pour tout $\varepsilon > 0$ il existe $h_\varepsilon \in C_0([a, b])$ telle que: $\int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x)| dx \leq \varepsilon$. Soit $g \in C_0([a, b])$.

Alors: $\int_a^b h_\varepsilon(x) g(x) dx = \int_a^b (h_\varepsilon(x) - f(x)) g(x) dx + \underbrace{\int_a^b f(x) g(x) dx}_{= 0 \text{ par 1.}}$

D'où: $\left| \int_a^b h_\varepsilon(x) g(x) dx \right| \leq \int_a^b |h_\varepsilon(x) - f(x)| |g(x)| dx \leq \varepsilon \|g\|_\infty$.

(6)

3: Soit $\delta > 0$. On teste l'inégalité obtenue en 2.

sur la fonction $g = \frac{h_\varepsilon}{\delta + |h_\varepsilon|}$. La présence du $\delta > 0$ nous assure la continuité de g .

On a: $\|g\|_\infty \leq 1$. De plus:

$$\int_a^b h_\varepsilon(x) g(x) dx = \int_a^b \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx \leq \varepsilon \|g\|_\infty \leq \varepsilon.$$

De là, par le théorème de convergence dominée ($|h_\varepsilon| \in L^1([a,b])$), on peut faire tendre δ vers 0 pour obtenir:

$$\int_a^b |h_\varepsilon(x)| dx = \int_a^b \lim_{\delta \rightarrow 0} \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx = \lim_{\delta \rightarrow 0} \int_a^b \frac{|h_\varepsilon(x)|^2}{\delta + |h_\varepsilon(x)|} dx \leq \varepsilon.$$

4: Il vient, d'après la définition de h_ε et d'après 3:

$$\begin{aligned} \int_a^b |f(x)| dx &= \int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x) + h_\varepsilon(x)| dx \\ &\leq \int_a^b |f(x) - h_\varepsilon(x)| dx + \int_a^b |h_\varepsilon(x)| dx \\ &\leq 2\varepsilon. \end{aligned}$$

Donc $\int_a^b |f(x)| dx = 0$. Cela est valable pour tout $[a,b] \subset I$,

donc $f = 0$ p.p sur I .