

①

Feuille de TD2 : Distributions - Exemples, ordre et support.Exercice 1 :

- a. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$.
 L'application $T: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et :

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx \right| = \left| \int_a^b \varphi(x^2) dx \right| \leq \int_a^b |\varphi(x^2)| dx \leq \|\varphi\|_\infty \int_a^b 1 dx = \|\varphi\|_\infty (b-a)$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre exactement 0. Déterminons son support.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^*)$. Alors $\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx = 0$ car

$\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}^*$ implique que $\varphi(y) = 0$ pour $y \geq 0$.

Donc $(\text{supp } T)^c \supset \mathbb{R}_+^*$ et $\text{supp } T \subset \mathbb{R}_+$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$. Soit $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta > 0$ et soit $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$. Soit φ une fonction "pic", $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi \geq 0$ et $\varphi(x_0) = 1$. En particulier, φ est strictement positive sur $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$ avec $0 < \delta' < \delta$ et $V_{\delta'} \subset V_\delta$, $x_0 \in V_{\delta'}$. On a de plus :

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x^2) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi(x^2) dx = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi(y) dy \geq \int_{x_0 - \delta'}^{x_0 + \delta'} \varphi(y) dy > 0$$

Donc T est non nulle au voisinage de x_0 . Donc $\mathbb{R}_+^* \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, on a $\mathbb{R}_+ \subset \text{supp } T$. Donc : $\text{supp } T = \mathbb{R}_+$.

(2)

b. L'application $T: \varphi \mapsto \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$.
 Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Alors:

$$\left| \int_{\mathbb{R}} \varphi'(x) e^{x^2} dx \right| = \left| \underbrace{\left[\varphi(x) e^{x^2} \right]_a^b}_{=0 \text{ car } \varphi(a)=\varphi(b)=0} - \int_a^b \varphi(x) \times 2xe^{x^2} dx \right|$$

$\leq \int_a^b |\varphi(x)| 2xe^{x^2} dx \leq \|\varphi\|_\infty (e^{b^2} - e^{a^2}) = C \|\varphi\|_\infty$.
 Donc T est une distribution d'ordre au plus 0, donc d'ordre 0. Calculons

le support de T . Soit $x_0 \in \mathbb{R}^*$ et $\delta > 0$ tel que $V_\delta =]x_0 - \delta, x_0 + \delta[\subset \mathbb{R}^*$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(V_\delta)$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Par ailleurs, $f: x \mapsto 2xe^{x^2}$ a un signe constant sur V_δ , disons strictement positif. Donc:

$$\forall \varepsilon < \delta, \langle T, \varphi \rangle \geq \int_{V_\varepsilon} \varphi(x) f(x) dx > 0. \quad (\text{cf a.})$$

Donc $\mathbb{R}^* \subset \text{supp } T$ et comme $\text{supp } T$ est fermé, $\mathbb{R} \subset \text{supp } T$.

Donc $\text{supp } T = \mathbb{R}$.

(3)

Exercice 2:

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. L'application $T: \varphi \mapsto \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx$ est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $[a, b] \subset \mathbb{R}$ tel que $\text{supp } \varphi \subset [a, b]$. Alors:

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx \right| = \left| \int_{[a, b] \cap \mathbb{R}^+} \varphi'(x) \log(x) dx \right| \leq \|\varphi'\|_\infty \underbrace{\int_{[a, b] \cap \mathbb{R}^+} \log(x) dx}_{\text{constante car } x \mapsto \log x \text{ est intégrable en } 0}$$

Donc T est une distribution d'ordre au plus 1.

2.-a. Avec φ_m comme dans l'énoncé, on a:

$$\begin{aligned} |\langle T, \varphi_m \rangle| &= \left| \int_{\frac{1}{2m}}^2 \varphi'_m(x) \log(x) dx \right| = \underbrace{\left| \left[\varphi_m \log(x) \right]_{\frac{1}{2m}}^2 \right|}_{=0} - \int_{\frac{1}{2m}}^2 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx \\ &\geq \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{dx}{x} = \log m. \end{aligned}$$

Donc: $\forall m \geq 1, |\langle T, \varphi_m \rangle| \geq \log m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$

b. Or, $\|\varphi_m\|_\infty = 1$ pour tout $m \geq 1$. Donc, avec $[a, b] = [0, 2]$, il existe $[a, b] \subset \mathbb{R}$, tel que pour tout $c > 0$ et tout $m \geq 1$, il existe $\varphi_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi_m \subset [0, 2]$ et: $|\langle T, \varphi_m \rangle| \geq c \|\varphi_m\|_\infty = c$. (car $\log m \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$).

Donc T n'est pas d'ordre 0, elle est donc d'ordre 1.

3. Tout d'abord, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset \mathbb{R}_+^*$, alors:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi'(x) \log(x) dx = 0 \quad \text{car } \varphi = 0 \text{ sur } [0, +\infty[.$$

Donc $\text{supp } T \subset \mathbb{R}_+^*$.

Réciproquement, soit $x_0 \in \mathbb{R}_+^*$ et soit $\delta > 0$ tel que $\exists x_0 - \delta, x_0 + \delta \subset \mathbb{R}_+^*$. Soit $\varphi \in C_0^\infty([x_0 - \delta, x_0 + \delta])$, $\varphi(x_0) = 1$ et $\varphi \geq 0$. Alors:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \varphi'(x) \log(x) dx = - \int_{x_0 - \delta}^{x_0 + \delta} \frac{\varphi(x)}{x} dx < 0. \quad \text{Donc } \langle T, \varphi \rangle \neq 0.$$

Donc $x_0 \in \text{supp } T$ et $\mathbb{R}_+^* \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, $\mathbb{R}_+ \subset \text{supp } T$. Donc $\text{supp } T = \mathbb{R}_+$.

④

Exercice 3:

Supposons par l'absurde qu'il existe $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\int_{x_0} = f$.

Alors: $\forall \varphi \in C^\infty_0(I)$, $\int_I f(x)\varphi(x)dx = \varphi(x_0)$ (*).

En particulier: $\forall \varphi \in C^\infty_0(I)$, $x_0 \notin \text{supp } \varphi$, $\int_I f(x)\varphi(x)dx = 0$.

Soit $J = I \cap \{x < x_0\}$ et supposons $\text{supp } \varphi \subset J$.

Alors $\int_J f \varphi = 0$ et $f = 0$ sur J d'après l'exercice 4 de la

Feuille de TD 1.

De même, $f = 0$ sur $J' = I \cap \{x > x_0\}$. Comme $I = J \cup \{x_0\} \cup J'$,
 $f = 0$ presque partout sur I ($\text{Leb}(\{x_0\}) = 0$) et :

$$\forall \varphi \in C^\infty_0(I), \int_I f(x)\varphi(x)dx = 0 \quad (**),$$

Mais, si $\varphi \in C^\infty_0(I)$ est telle que $\varphi(x_0) \neq 0$, alors (**) contredit (*).

Donc, il ne peut exister $f \in L^1_{loc}(I)$ telle que $\int_{x_0} = f$.

⑤ Exercice 4 - Valeur principale de $\frac{1}{x}$.

1. On a: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + \int_0^x \varphi'(t) dt$. On pose $t = xu$.

Alors: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + x \int_0^1 \varphi'(xu) du$.

Posons $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu) du$, pour tout $x \in \mathbb{R}$. Alors, comme

$\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ et $[0, 1]$ est compact, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ par le théorème de

dérivation sous le signe $\int$ et on a: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi(x) = \varphi(0) + x \psi(x)$.

2. Soit $\varepsilon > 0$. Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

$$\text{On a: } \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} + \psi(x) dx$$

$$= \underbrace{\int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(0)}{x} dx}_{= 0 \text{ par impaire}} + \int_{|x| > \varepsilon} \psi(x) dx \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > 0} \psi(x) dx \text{ car } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}).$$

Donc la limite existe et vaut $\int_{|x| > 0} \psi(x) dx$.

3. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$. Alors: $\varphi \mapsto \lim_{\varepsilon \rightarrow 0^+} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{\varphi(x)}{x} dx$ est une

forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et: $\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi \rangle = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \psi(x) dx \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 \varphi'(xu) du \right) dx \right|$

$$\leq \| \varphi' \|_\infty \left| \int_{-\infty}^{\infty} \left(\int_0^1 du \right) dx \right| = 2a \| \varphi' \|_\infty.$$

Donc $\text{vp}(\frac{1}{x})$ est une distribution d'ordre au plus 1.

4. Soient $\varepsilon > 0$ et $m \geq 1$ assez grand pour que $\varepsilon \geq \frac{1}{2m}$.

$$\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi_m \rangle \geq \int_{\varepsilon}^{2m} \frac{\varphi_m(x)}{x} dx \geq \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{\varphi_m(x)}{x} dx = \int_{\frac{1}{m}}^1 \frac{dx}{x} = \log m.$$

Alors on faisant tendre m vers $+\infty$: $\langle \text{vp}(\frac{1}{x}), \varphi_m \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} +\infty$, et $\| \varphi_m \|_\infty = 1$ pour tout m .

Donc $\text{vp}(\frac{1}{x})$ n'est pas d'ordre 0. C'est donc une distribution d'ordre 1.

6

Exercice 5:

1. Soit $[-a, a]^2 \subset \mathbb{R}^2$ un compact et soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]^2$.

Alors:

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \int_0^{+\infty} \left(\varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) - \varphi(0, \sin t) \right) dt \right| = \left| \int_0^{+\infty} \int_0^1 \partial_x \varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) \frac{ds}{t^2} dt \right|$$

$$\leq \int_0^{+\infty} \left| \int_0^1 \partial_x \varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) ds \right| \frac{dt}{t^2} = \left[\varphi\left(\frac{s}{t^2}, \sin t\right) \right]_0^1 \Big|_0^{+\infty}$$

$$\leq \|\partial_x \varphi\|_\infty \int_0^{+\infty} \frac{1}{t^2} dt = \|\partial_x \varphi\|_\infty \left[-\frac{1}{t} \right]_0^{+\infty} = \sqrt{a} \|\partial_x \varphi\|_\infty.$$

Comme T est une forme linéaire sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, cette estimée de $|\langle T, \varphi \rangle|$ nous dit que T est une distribution d'ordre au plus 1.

2. Montrons que si $S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid y = \sin \frac{1}{\sqrt{x}}, x > 0\}$, alors $\text{supp } T = \bar{S} = S \cup (\{0\} \times [t, 1])$.



• Soit $x_0 \notin \bar{S}$. Alors, il existe $\varepsilon > 0$, $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \subset \bar{S}^c$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\text{supp } \varphi \subset \bar{B}(x_0, \varepsilon)$. Alors par définition de T , $\langle T, \varphi \rangle = 0$ car: $\forall t > 0$, $(\frac{1}{t^2}, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \varepsilon)$ et $(0, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \varepsilon)$.

Donc $x_0 \notin \text{supp } T$ et $\text{supp } T \subset \bar{S}$.

• Réciproquement, soit $x_0 \in S$ et soit $\varepsilon > 0$ tel que $\bar{B}(x_0, \varepsilon) \cap (\{0\} \times \mathbb{R}) = \emptyset$.

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ telle que $\text{supp } \varphi \subset \bar{B}(x_0, \varepsilon)$, $\varphi = 1$ sur $\bar{B}(x_0, \frac{\varepsilon}{2})$ et $\varphi \geq 0$. Alors:

$$\langle T, \varphi \rangle = \int_0^{+\infty} \varphi\left(\frac{1}{t^2}, \sin t\right) dt \geq t_2 - t_1 > 0$$

où t_1 est tel que $x_0 = (\frac{1}{t_1^2}, \sin t_1)$ et $t_2 = \inf\{t > t_1, (\frac{1}{t^2}, \sin t) \notin \bar{B}(x_0, \frac{\varepsilon}{2})\}$.

Alors, T est non nulle au voisinage de x_0 et $S \subset \text{supp } T$. Comme $\text{supp } T$ est fermé, $\bar{S} \subset \text{supp } T$ et finalement, $\text{supp } T = \bar{S}$.

⑦

Exercice 6 - Distribution d'ordre infini.

- $T: \varphi \mapsto \sum_{p=0}^{\infty} \varphi^{(p)}(p)$ est une forme linéaire sur $C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, continue.

Donc $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$. En effet si $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $\varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$, on posant

$$p_0 = E(a) + 1, \text{ on a:}$$

$$|\langle T, \varphi \rangle| = \left| \sum_{p=0}^{+\infty} \varphi^{(p)}(p) \right| = \left| \sum_{p=0}^{p_0} \varphi^{(p)}(p) \right| \leq \sum_{p=0}^{p_0} \|\varphi^{(p)}\|_{\infty}.$$

somme finie.

- Supposons par l'absurde que T est d'ordre fini m .

Soit $\psi_0 \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$, égale à 1 sur $[-\frac{1}{4}, \frac{1}{4}]$, positive. Soit $\lambda > 1$

$$\text{Posons } \psi(x) = \frac{x^{m+1}}{(m+1)!} \psi_0(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R} \text{ et } \varphi(x) = \psi(\lambda(x - (m+1))).$$

On considère le compact $K = [m + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}]$ de $\mathbb{R}$. Comme $\lambda > 1$, φ est à support dans K et est C^{∞} . D'autre part, par la formule de Leibniz, on a: $\psi^{(m+1)}(0) = \psi_0(0) = 1$.

Puis, comme $\text{supp } \varphi \subset K$, on a: $\langle T, \varphi \rangle = \varphi^{(m+1)}(m+1) = \lambda^{m+1} \psi^{(m+1)}(0)$
 $= \lambda^{m+1}$.

D'autre part, pour $j \leq m$, on a:

$$\forall x \in \mathbb{R}, |\varphi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \sup |\psi^{(j)}(x)| \leq \lambda^j \|\psi^{(j)}\|_{\infty}.$$

Or, T est supposée d'ordre m , donc pour $K = [m + \frac{1}{2}, m + \frac{3}{2}]$, il existe $C_k \in \mathbb{R}_+^*$ telle que: $|\langle T, \varphi \rangle| \leq C_k \sum_{0 \leq j \leq m} \|\varphi^{(j)}\|_{\infty}$, soit ici:

$$\lambda^{m+1} \leq C_k \sum_{j=0}^m \lambda^j \|\psi^{(j)}\|_{\infty} \leq C_k \left(\sum_{j=0}^m \|\psi^{(j)}\|_{\infty} \right) \lambda^m$$

Or, cela est impossible si $\lambda \rightarrow +\infty$ car on a: $\lambda \leq C_k \left(\sum_{j=0}^m \|\psi^{(j)}\|_{\infty} \right) \lambda^m$.
 Donc T ne peut pas être d'ordre fini.

⑧

Exercice 7 - Partie finie de x^α

1. Soit $[-a, a] \subset \mathbb{R}$, $a > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ avec $\text{supp } \varphi \subset [-a, a]$.

Pour $\alpha \in]-2, -1[$ et $\varepsilon > 0$, on a :

$$\int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) + x^{\alpha+1} \psi(x) dx$$

avec $\psi(x) = \int_0^1 \varphi'(xu) du$ et donc $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$.

$$\text{Alors : } \int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) dx + \int_{\varepsilon}^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx.$$

$$\text{On : } \int_{\varepsilon}^a x^\alpha \varphi(0) dx = \left[\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0) \right]_{\varepsilon}^a = \frac{a^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0) - \frac{\varepsilon^{\alpha+1}}{\alpha+1} \varphi(0)$$

$$\text{On pose } A_\varphi = -\frac{\varphi(0)}{\alpha+1} \text{ et } R_\varepsilon = \int_{\varepsilon}^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1}$$

Comme $\alpha \in]-2, -1[$, $x \mapsto x^{\alpha+1}$ est intégrable au voisinage de 0, donc comme ψ est $C_0^\infty(\mathbb{R})$ et bornée, $x \mapsto x^{\alpha+1} \psi(x)$ est aussi intégrable au voisinage de 0. Donc R_ε possède une limite lorsque ε tend vers 0^+ .

$$\int_0^a x^{\alpha+1} \psi(x) dx + \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1}.$$

On a bien : $\int_{\varepsilon}^{+\infty} x^\alpha \varphi(x) dx = A_\varphi \varepsilon^{\alpha+1} + R_\varepsilon$ avec R_ε possédant une limite en 0^+ .

$$2. \text{ On pose : } \langle \text{pf}(x^\alpha), \varphi \rangle = \frac{\varphi(0)}{\alpha+1} a^{\alpha+1} + \int_0^a x^{\alpha+1} \left(\int_0^1 \varphi'(xu) du \right) dx.$$

$$\text{Alors : } |\langle \text{pf}(x^\alpha), \varphi \rangle| \leq C_0 \|\varphi\|_\infty + C_1 \|\varphi'\|_\infty$$

et $\text{pf}(x^\alpha)$ est une distribution d'ordre au plus 1.

De plus : $\text{supp pf}(x^\alpha) = \mathbb{R}_+$.

9

Exercice 8

1. Supposons que $fT=0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp } \varphi \subset Z(f)^c$.

Alors $\frac{\varphi}{f} \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ et on a: $\langle T, \varphi \rangle = \langle fT, \frac{\varphi}{f} \rangle = 0$.

Donc T s'annule sur $Z(f)^c$ et donc $\text{supp } T \subset Z(f)$.

2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^m)$ d'ordre 0 et supposons que $\text{supp } T \subset Z(f)$.

Soit K un compact de $\mathbb{R}^m$. Comme T est d'ordre 0, il existe $c > 0$ telle que pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $\text{supp } \varphi \subset K$,

$$|\langle T, \varphi \rangle| \leq C \|\varphi\|_\infty.$$

Or, pour toute $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$, $f\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^m)$ avec $\text{supp } (f\varphi) \subset K$.

$$\text{Donc: } |\langle fT, \varphi \rangle| = |\langle T, f\varphi \rangle| \leq C \|f\varphi\|_\infty.$$

Or, comme $\text{supp } T \subset Z(f)$, $f\varphi$ est nulle sur $\text{supp } T$ et donc

$$|\langle fT, \varphi \rangle| = 0. \text{ Donc } fT = 0.$$

3. Supposons $T = \delta'$ qui n'est pas d'ordre 0. Prenons $f(x) = x$ par exemple. Alors $\text{supp } T \subset Z(f)$ car $\text{supp } T = \{0\}$, mais si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$

$$\text{avec } \varphi(0) \neq 0 : \quad \langle x\delta', \varphi \rangle = \langle \delta'_0, x\varphi \rangle = (x\varphi)'(0) = \varphi(0) \neq 0.$$

Donc $x\delta'$ n'est pas la distribution nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a: $\langle f\delta', \varphi \rangle = \langle \delta'_0, \varphi \rangle = \langle \delta'_0, f\varphi \rangle = f'(0)\varphi(0) + f(0)\varphi'(0)$

Alors $\langle f\delta'_0, \varphi \rangle$ est nul pour φ quelconque si et seulement si:

$$f(0) = f'(0) = 0.$$

Alors $|f(x)| = x^2 g(x)$ avec $g \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 9

1. Comme T est une distribution à support compact, elle est d'ordre fini.

2. a. Par la formule de Leibniz:

$$\forall \ell \leq m, (p_n \varphi)^{(\ell)} = \sum_{k=0}^{\ell} \binom{\ell}{k} p_n^{(\ell-k)} \varphi^{(k)}$$

Soit $\varepsilon > 0$. Or, comme $\varphi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0, $\varphi^{(k)}(x) = o(x^{m-k})$, par unicité des développements limités. Par ailleurs:

$$\forall x \in \mathbb{R}, p_n^{(\ell-k)}(x) = \frac{1}{n^{\ell-k}} p^{(\ell-k)}\left(\frac{x}{n}\right). \text{ Alors, pour } n \text{ assez petit}$$

$$\text{et } |x| \leq n: \quad |p_n^{(\ell-k)}(x) \varphi^{(k)}(x)| \leq \frac{n^{m-k}}{n^{\ell-k}} \|p^{(\ell-k)}\|_{\infty} = n^{m-\ell} \|p^{(\ell-k)}\|_{\infty}$$

$$\text{Donc: } \lim_{n \rightarrow 0} \sup_{|x| \leq n} |(p_n \varphi)^{(\ell)}(x)| = 0. \quad \leq \varepsilon \|p^{(\ell-k)}\|_{\infty}.$$

b. Comme T est de support $\{0\}$ et que p_n vaut 1 au voisinage de 0, $\forall n > 0$, $\langle T, \varphi \rangle = \langle T, p_n \varphi \rangle$, $\forall \varphi \in C_0^{\infty}(\mathbb{R})$.

Comme T est d'ordre m , que $p_n \varphi$ est à support dans $[-n, n]$ et $[-n, n] \subset [-1, 1]$ (compact fixe), par a. on a:

$$\lim_{n \rightarrow 0} |\langle T, p_n \varphi \rangle| = 0 \quad \left(|\langle T, p_n \varphi \rangle| \leq \sum_{j \leq m} \sum_{|x| \leq 1} \|p_n \varphi^{(j)}\| \right)$$

$$\text{Donc: } \langle T, \varphi \rangle = \lim_{n \rightarrow 0} |\langle T, p_n \varphi \rangle| = 0.$$

(11)

3. Par la formule de Taylor avec reste intégral:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-u)^m \varphi^{(m+1)}(xu) du$$

En posant $\psi(x) = \frac{x^{m+1}}{m!} \int_0^1 (1-u)^m \varphi^{(m+1)}(xu) du$,
 ψ est de classe C^∞ (dérivation sous le signe $\int$) et $\psi(x) = o(x^m)$
 au voisinage de 0.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors, par 3, il existe ψ de classe C^∞
 avec $\psi(x) = o(x^m)$ au voisinage de 0 telle que:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad \varphi(x) = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} x^k + \psi(x).$$

Soit p comme à la question 2. Alors $p\varphi$ est à support compact
 et φ et $p\varphi$ sont égaux au voisinage 0, donc, comme $\text{supp } T = \text{supp } T$:

$$\langle T, \varphi \rangle = \langle T, p\varphi \rangle = \sum_{k=0}^m \frac{\varphi^{(k)}(0)}{k!} \langle T, px^k \rangle + \langle T, p\psi \rangle.$$

Or, $p\psi$ est C^∞ à support compact et $(p\psi)(x) = o(x^m)$ au voisinage
 de 0. Donc par 2, $\langle T, p\psi \rangle = 0$.

Finalement:

$$\langle T, \varphi \rangle = \sum_{k=0}^m \left(\frac{1}{k!} \langle T, px^k \rangle \right) \varphi^{(k)}(0) = \sum_{k=0}^m a_k \varphi^{(k)}(0)$$

avec $a_k = \frac{1}{k!} \langle T, px^k \rangle$.

Donc, avec ces a_k : $T = \sum_{k=0}^m a_k \delta_0^{(k)}$.