

①

Exercice 11. a. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors: $\langle H', \varphi \rangle = -\langle H, \varphi' \rangle$

$$\begin{aligned}
 &= - \int_{-\infty}^{\infty} 1 \times \varphi'(x) dx \\
 &= - [\varphi(x)]_0^{\infty} + \int_0^{\infty} 0 dx \\
 &= \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle
 \end{aligned}$$

Donc $H' = \delta_0$ b. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors: $\langle \log|x|', \varphi \rangle = -\langle \log|x|, \varphi' \rangle$
 $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$.

$$\begin{aligned}
 \text{On: } \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \log|x| \varphi'(x) dx &= - \int_{A \geq |x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x} dx + \int_{\varepsilon \leq |x| \leq A} \log|x| \varphi'(x) dx \\
 &= - \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{\varepsilon \leq |x| \leq A} \log|x| \varphi'(x) dx
 \end{aligned}$$

On, en écrivant Taylor à l'ordre 1 pour φ , on obtient:

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \psi(\varepsilon) \text{ avec } \psi(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\varphi(\varepsilon) = \varphi(0) + \varepsilon \tilde{\psi}(\varepsilon) \text{ avec } \tilde{\psi}(\varepsilon) \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0$$

$$\text{Donc: } (\log \varepsilon) [\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] = [\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] \log \varepsilon = (\log \varepsilon) \psi(\varepsilon)$$

$$\text{Or } \varepsilon \log \varepsilon \xrightarrow{\varepsilon \rightarrow 0} 0 \text{ donc } (\log \varepsilon) [\varphi(\varepsilon) - \varphi(0)] = \psi(\varepsilon)$$

$$\text{et } \langle \log|x|', \varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} \varphi(x) \frac{1}{x} dx = \psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

$$\text{Donc: } (\log|x|)' = \psi\left(\frac{1}{x}\right).$$

②

c. Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Alors:

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \langle \varphi, \lambda^{-1} \rangle = \langle \varphi, \lambda^{-1} \rangle$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

2. On a, par intégration par parties successive: pour $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\langle \varphi, \lambda^{-1} \rangle = \langle \varphi, \lambda^{-1} \rangle = \langle \varphi, \lambda^{-1} \rangle$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

$$\int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi\left(\frac{x}{\lambda}\right) dx$$

③

Exercice 2:

1. Soit $q \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a: $\langle x v p(\frac{1}{x}), q \rangle = \langle v p(\frac{1}{x}), x q \rangle$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| \geq \varepsilon} x \frac{q(x)}{x} dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}} q(x) dx = \langle 1, q \rangle.$$

Donc on a bien: $x v p(\frac{1}{x}) = 1$.

2. a. On sait que T s'annule sur les fonctions de la forme $x q$ avec $q \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Soit $q \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ que l'on écrit:

$$\forall x \in \mathbb{R}, q(x) = q(0) + x \psi(x) \text{ avec } \psi \in C_0^\infty(\mathbb{R}) \text{ et } q(0) \neq 0.$$

Soit maintenant $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ égale à 1 sur le support de q . En multipliant l'égalité précédente par ϕ on obtient:

$$\forall x \in \mathbb{R}, q(x) = q(x) \phi(x) = q(0) \phi(x) + x \psi(x) \phi(x).$$

$$\text{D'où: } \langle T, q \rangle = q(0) \langle T, \phi \rangle + \langle x T, \psi \phi \rangle$$

$$\text{Or } x T = 0 \text{ donc: } \langle T, q \rangle = q(0) \langle T, \phi \rangle$$

$$\text{et comme } q(0) \neq 0: \langle T, \phi \rangle = \frac{\langle T, q \rangle}{q(0)} = c_q, \text{ indépendante de } q.$$

b. On choisit $\phi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ telle que ϕ vaille 1 à la fois sur le support de q et sur le support de $\tilde{\psi}$. Alors:

$$c_q = \langle T, \phi \rangle = c_{\tilde{\psi}}.$$

c. Notons C la valeur commune de toutes les c_q pour $q \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $q(0) \neq 0$.

$$\text{Alors, } \langle T, q \rangle = q(0) C = C \langle \delta_0, q \rangle.$$

$$\text{Si } q(0) = 0 \text{ on a encore } \langle T, q \rangle = C \langle \delta_0, q \rangle = 0.$$

Donc si $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ avec $x T = 0$, alors $T = C \delta_0$, $C \in \mathbb{R}$ (ou ∞)

La réciproque est vraie car $x C \delta_0 \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ et $x C \delta_0 = 0$. car $\text{supp}(C \delta_0) \subset \{0\}$.

(4)

3. Comme $x \varphi(\frac{1}{x}) = 1$, l'équation $xT = 1$ s'écrit:

$$x(T - \varphi(\frac{1}{x})) = 0.$$

D'où par 2., $T - \varphi(\frac{1}{x}) = C\delta_0$, $C \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$)

Donc les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de $xT = 1$ sont les $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$

de la forme $T = \varphi(\frac{1}{x}) + C\delta_0$, $C \in \mathbb{R}$ (ou $\mathbb{C}$).

4. (i) Soit $O_m =]-\frac{3\pi}{4} + m\pi, \frac{3\pi}{4} + m\pi[$. Alors $(O_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ est un recouvrement localement fini de $\mathbb{R}$. Soit $(\chi_m)_{m \in \mathbb{Z}}$ une partition de l'unité associée à $(O_m)_{m \in \mathbb{Z}}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On décompose φ en:

$$\varphi = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi \chi_m := \sum_{m \in \mathbb{Z}} \varphi_m.$$

D'après la formule de Taylor avec reste intégral, chaque

φ_m s'écrit: $\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_m(x) = \varphi(m\pi) + (x - m\pi)\varphi'_m(x)$ avec $\varphi'_m \in C_0^\infty(O_m)$.

On remarque par ailleurs que $x \mapsto \frac{x - m\pi}{\sin x}$ est C^∞ sur O_m . Enfin,

si η_m est une fonction plateau valant 1 sur O_m et à support dans $] -\pi + m\pi, \pi + m\pi[$, alors on écrit:

$$\forall x \in \mathbb{R}, \varphi_m(x) = \varphi_m(x)\eta_m(x) = \varphi(m\pi)\eta_m(x) + \sin x \cdot \underbrace{\frac{x - m\pi}{\sin x} \varphi'_m(x)}_{= \varphi'_m \in C_0^\infty(\mathbb{R})}$$

$$\text{Donc: } \langle T, \varphi \rangle = \sum_{m \in \mathbb{Z}} \left[\langle T, \eta_m \rangle \varphi(m\pi) + \underbrace{\langle (\sin x)T, \varphi'_m \rangle}_0 \right]$$

$$= \sum_{m \in \mathbb{Z}} \langle T, \eta_m \rangle \varphi(m\pi)$$

Si on pose $c_m = \langle T, \eta_m \rangle$, on a bien: $T = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \delta_{m\pi}$.

(ii) Réciproquement, si $T = \sum_{m \in \mathbb{Z}} c_m \delta_{m\pi}$, comme $\sin(m\pi) = 0$, on a bien: $(\sin x)T = 0$.

(5)

Exercice 3

1. On a: $(\alpha T)' = \alpha T' + T$.

2. Par 1., l'équation $\alpha T' + T = 0$ devient $(\alpha T)' = 0$.

Donc il existe $C \in \mathbb{R}$ telle que $\alpha T = C$. Or, $C \nu p(\frac{1}{n})$ est solution de cette équation. Donc: $\alpha T = C \Leftrightarrow \alpha(T - C \nu p(\frac{1}{n})) = 0$.

Donc il existe $C_2 \in \mathbb{R}$ telle que:

$$T - C_1 \nu p(\frac{1}{n}) = C_2 \delta_0$$

soit encore:

$$T = C_1 \nu p(\frac{1}{n}) + C_2 \delta_0.$$

Exercice 4

Soit $\varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$\langle T_n, \varphi \rangle = \int_{-A}^A \frac{\sin(nt)}{\pi t} \varphi(t) dt.$$

On décompose φ en: $\varphi(t) = \varphi(0) + t\psi(t)$ avec $\psi(t) \in C_c^\infty(\mathbb{R})$.

Alors: $\forall n \in \mathbb{N}, \langle T_n, \varphi \rangle = \varphi(0) \int_{-A}^A \frac{\sin(nt)}{\pi t} dt + \frac{1}{\pi} \int_{-A}^A \psi(t) \sin(nt) dt.$

D'après Riemann-Lebesgue, la seconde intégrale tend vers 0 lorsque n tend vers l'infini. Puis en faisant le changement de variable $u = nt$ dans la première intégrale, on obtient: $\int_{-mA}^{mA} \frac{\sin u}{\pi u} du \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin u}{u} du = 1$

Ainsi: $\lim_{n \rightarrow +\infty} \langle T_n, \varphi \rangle = \varphi(0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle$. Donc: $(T_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers δ_0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(6)

Exercice 5

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On écrit : $\varphi(x) = \varphi(0) + x\psi(x)$ avec $|\psi(x)| = |\varphi'(x)|$

Alors : $\forall m \in \mathbb{N}, \langle T_m, \varphi \rangle = m(\varphi(\frac{1}{m}) - \varphi(-\frac{1}{m}))$

$$= m \left(\frac{1}{m} \psi(\frac{1}{m}) - (-\frac{1}{m}) \psi(-\frac{1}{m}) \right)$$

$$= \psi(\frac{1}{m}) + \psi(-\frac{1}{m}) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 2\psi(0) = 2 \int_0^1 \varphi'(x) dx = 2\varphi'(0)$$

Donc : $\forall m \in \mathbb{N}, \langle T_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 2\varphi'(0) = \langle 2\delta'_0, \varphi \rangle$

Donc $(T_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $2\delta'_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$. Or, pour tout m , T_m est d'ordre 0 et $2\delta'_0$ est d'ordre 1. En général, il n'y a pas de lim entre l'ordre des éléments de la suite et l'ordre de la limite.

Exercice 6

(i) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \langle A_m, \varphi \rangle &= \int_{-A}^A \sin(mx) \varphi(x) dx \\ &= \underbrace{\left[-\frac{\cos(mx)}{m} \varphi(x) \right]_{-A}^A}_{=0} + \int_{-A}^A \frac{\cos(mx)}{m} \varphi'(x) dx \end{aligned}$$

$$\text{Donc } \forall n \in \mathbb{N}, |\langle A_m, \varphi \rangle| \leq \frac{1}{m} \int_{-A}^A |\varphi'(x)| dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

Donc $(A_m)_{m \in \mathbb{N}}$ tend vers 0 dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(ii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$:

$$\langle B_m, \varphi \rangle = \int_{-A}^A m g(mx) \varphi(x) dx = \int_{-mA}^{mA} g(u) \varphi\left(\frac{u}{m}\right) du$$

$$= \int_{\mathbb{R}} g(u) \varphi\left(\frac{u}{m}\right) \mathbb{1}_{[-mA, mA]}(u) du.$$

$$\text{Or : } g(u) \varphi\left(\frac{u}{m}\right) \mathbb{1}_{[-mA, mA]}(u) \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} g(u) \varphi(0), \quad \forall u \in \mathbb{R}.$$

$$\text{et : } |g(u) \varphi\left(\frac{u}{m}\right) \mathbb{1}_{[-mA, mA]}(u)| \leq |g(u)| \|\varphi\|_\infty \in L^1(\mathbb{R})$$

(7)

Donc, par le théorème de convergence dominée :

$$\langle B_n, \varphi \rangle \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \varphi(0) \int_{\mathbb{R}} g(u) du$$

Donc $(B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers $(\int_{\mathbb{R}} g(u) du) \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iii) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. Alors :

serons de Riemann

$$\langle G_n, \varphi \rangle = \frac{1}{n} \sum_{p=0}^{n-1} \varphi\left(\frac{p}{n}\right) \xrightarrow{n \rightarrow +\infty} \int_0^1 \varphi(x) dx = \int_{\mathbb{R}} \varphi(x) \chi_{[0,1]}(x) dx.$$

Donc $(G_n)_{n \in \mathbb{N}}$ converge vers la distribution associée à $\chi_{[0,1]}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

(iv) Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \varphi \subset [-A, A]$. Alors, pour tout $m \in \mathbb{N}$,

$$\langle D_m, \varphi \rangle = \langle e^{inx} \varphi\left(\frac{1}{n}\right), \varphi \rangle = \langle \varphi\left(\frac{1}{n}\right), e^{inx} \varphi \rangle$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{|x| > \varepsilon} \frac{e^{inx} \varphi(x)}{x} dx$$

$$= \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \left[\int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\cos(mx) \varphi(x)}{x} dx + i \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\sin(mx) \varphi(x)}{x} dx \right]$$

Pour la partie réelle :

On écrit $\varphi(x) = \varphi(0) + x \psi(x)$, $\psi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$, $\text{supp } \psi \subset [-A, A]$.

$$\begin{aligned} \text{On a : } \int_{A > |x| > \varepsilon} \cos(mx) \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \varphi(0) \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\cos(mx)}{x} dx + \int_{A > |x| > \varepsilon} \cos(mx) \psi(x) dx \\ &= 0 \text{ par imparité} \end{aligned}$$

$$\text{Donc : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A > |x| > \varepsilon} \cos(mx) \frac{\varphi(x)}{x} dx = \int_{-A}^A \cos(mx) \psi(x) dx \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0.$$

$$\text{Pour la partie imaginaire : } \int_{A > |x| > \varepsilon} \sin(mx) \frac{\varphi(x)}{x} dx = \varphi(0) \int_{A > |x| > \varepsilon} \frac{\sin(mx)}{x} dx + \int_{A > |x| > \varepsilon} \sin(mx) \psi(x) dx$$

$$\begin{aligned} \text{Donc : } \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{A > |x| > \varepsilon} \sin(mx) \frac{\varphi(x)}{x} dx &= \varphi(0) \underbrace{\int_{-A}^A \frac{\sin(mx)}{x} dx}_{\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} \pi} + \underbrace{\int_{-A}^A \sin(mx) \psi(x) dx}_{\xrightarrow{m \rightarrow +\infty} 0} \rightarrow \pi \varphi(0) + 0 \end{aligned}$$

Donc $\langle D_m, \varphi \rangle \xrightarrow{m \rightarrow +\infty} i\pi \varphi(0)$ et $(D_m)_{m \in \mathbb{N}}$ converge vers $i\pi \delta_0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$.

⑧

Exercice 7:

1. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a: $\langle \delta'_0 * \delta'_0, \varphi \rangle = \langle \delta'_0 \otimes \delta'_0, \varphi(x+y) \rangle$
 $= \langle \delta'_0, -\langle \delta_0, \partial_y \varphi(x,y) \rangle \rangle$
 $= \langle \delta'_0, -\varphi'(x) \rangle$
 $= \varphi''(0)$.

Donc $\delta'_0 * \delta'_0 = \delta''_0$.

On peut aussi dériver l'égalité: $\delta_0 * \delta_0 = \delta_0$, deux fois.

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Pour $x \in \mathbb{R}$, on note φ_x la fonction de $C_0^\infty(\mathbb{R})$ définie par $\varphi_x(y) = \varphi(x,y)$. On a:

$$\begin{aligned} \langle \delta'_a \otimes \delta'_b, \varphi \rangle &= \langle \delta'_a, \langle \delta'_b, \varphi_x \rangle \rangle = \langle \delta'_a, -\varphi'_x(b) \rangle \dots \\ &= \langle \delta'_a, -\partial_y \varphi(b) \rangle = \partial_x \partial_y \varphi(a,b). \end{aligned}$$

3. $E = \mathcal{S}'_0$ convient. En effet si on dérive k fois l'identité $\delta_0 * T = T$ on obtient $\mathcal{S}'_0^{(k)} * T = T^{(k)}$.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$. On a:

$$\begin{aligned} \langle X^m(T * S), \varphi \rangle &= \langle T * S, X^m \varphi \rangle = \langle T \otimes S, (x+y)^m \varphi(x,y) \rangle \\ \text{où } \varphi(x,y) &= \varphi(x+y) \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k \langle T \otimes S, x^k y^{m-k} \varphi(x,y) \rangle \\ &= \sum_{k=0}^m C_m^k \langle x^k T \rangle \otimes (y^{m-k} S), \varphi(x,y) = \sum_{k=0}^m C_m^k (X^k T) * (X^{m-k} S), \varphi \end{aligned}$$

9)

Exercice 8:

1. a. Comme ϕ est à support compact, il existe $a > 0$ tel que $\text{supp } \phi \subset [-a, a]$.

Alors, si $\chi(x)\chi(y)\phi(x+y) \neq 0$, on a $x \geq -1, y \geq -1$ et $x+y \leq a$.

D'où: $x \in [-1, a+1]$ et $y \in [-1, a+1]$. Ainsi:

$$\text{supp } (\phi^\Delta) \subset [-1, a+1]^2 \quad \text{et} \quad \phi^\Delta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2).$$

b. Par a., la distribution $T \otimes S$ est bien définie. Soit χ_1 une autre fonction vérifiant les mêmes hypothèses que χ . On a:

$$\begin{aligned} \langle T_x \otimes S_y, \phi^\Delta(x, y) \rangle &= \langle T_x \otimes S_y, \chi_1(x)\chi_1(y)\phi(x+y) \rangle = \langle T_x \otimes S_y, (\chi_1(x)-\chi_1(x))\chi_1(y)\phi(x+y) \rangle \\ &\quad + \langle T_x \otimes S_y, \chi_1(x)(\chi_1(y)-\chi_1(y))\phi(x+y) \rangle \end{aligned}$$

Or, $\text{supp}(\chi - \chi_1) \subset]-\infty, -1]$ donc $(\text{supp } T) \cap \text{supp}(\chi - \chi_1) = \emptyset$, ce qui implique que le premier crochet est nul. Puis, comme $(\text{supp } S) \cap \text{supp}(\chi - \chi_1) = \emptyset$, le second crochet est lui aussi nul. Ainsi:

$$\langle T_x \otimes S_y, \phi^\Delta \rangle = \langle T_x \otimes S_y, \phi^\Delta \rangle \quad \text{et} \quad T \otimes S \text{ ne dépend pas de choix de } \chi.$$

c. Soit $\delta \in]0, \frac{1}{2}[$ et soit $\chi_\delta = 1$ sur $] -\delta, +\delta[$ et $\chi_\delta = 0$ sur $] -\infty, -2\delta[$.

D'après b. on a:

$$\forall \phi \in C_0^\infty(\mathbb{R}), \quad \langle T \otimes S, \phi \rangle = \langle T_x \otimes S_y, \phi(x+y)\chi_\delta(x)\chi_\delta(y) \rangle.$$

On choisit ϕ à support dans $] -\infty, 0[$. Alors, il existe $a > 0$ tel que $\text{supp } \phi \subset] -\infty, -a[$. Ainsi, $(x, y) \mapsto \chi_\delta(x)\chi_\delta(y)\phi(x+y)$ est non nulle uniquement si $x+y \leq -a$, $x \geq -2\delta, y \geq -2\delta$ soit encore $x \leq -a+2\delta$ et $y \leq -a+2\delta$. Mais, pour δ assez petit, $-a+2\delta < 0$ et comme $\text{supp } T \subset [0, +\infty[$ et $\text{supp } S \subset [0, +\infty[$, on obtient: $\langle T \otimes S, \phi \rangle = 0$. Donc: $\text{supp}(T \otimes S) \subset [0, +\infty[$.

(10)

2. a. Soit H la distribution de Heaviside, i.e. la fonction indicatrice de $]0, +\infty[$. Alors $H \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ et

$$H * \delta'_0 = H' * \delta_0 = \delta_0 * \delta_0 = \delta_0.$$

Donc H est l'inverse de δ'_0 dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.

b. Supposons par l'absurde qu'il existe $S \in \mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$ telle que $T * S = \delta_0$. Comme $T \in C^\infty_0$, on devrait avoir que $T * S$ est la distribution associée à une fonction C^∞ . Or δ_0 ne l'est pas. Contradiction et résultat : si $T \in C^\infty_0(]0, +\infty[)$, T n'est pas inversible dans $\mathcal{D}'_+(\mathbb{R})$.