Institut Galilée

Filière MACS 2

Mathématiques, Théorie Générale I

Année 2010-2011

1

Feuille de TD4 : Equations aux dérivées partielles

Exercice 1

1. Soit K un compact de $\mathbb{R}^2$ et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset K$.

Posons $K_1 = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, h(x)) \in K\}$ qui est compact car K l'est et h est un C^1-difféo.

Alors : $|\langle T, \varphi\rangle| \leqslant \left(\int_{K_1} dx\right) \sup_{(x,y)\in K} |\varphi(x,y)| \leqslant C \|\varphi\|_\infty$.

Donc T est une distribution d'ordre au plus 0 donc d'ordre 0 sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soit D la courbe $D = \{(x, h(x)) \mid x \in \mathbb{R}\}$. Montrons que $\operatorname{supp} T = D$.

Tout d'abord, soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, $\operatorname{supp}\varphi \subset \mathbb{R}^2 \setminus D$. Alors $\varphi(x, h(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et $\langle T, \varphi\rangle = 0$. Donc $D^c \subset (\operatorname{supp} T)^c$ et $\operatorname{supp} T \subset D$.

Réciproquement, montrons que tout point $M_0 = (x_0, h(x_0)) \in D$ est dans $\operatorname{supp} T$.

Soit $\delta > 0$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ une fonction positive, avec $\operatorname{supp}\varphi \subset B(M_0, \delta)$ et $\varphi(x,y) = 1$ pour tout $(x,y) \in B(M_0, \delta/2)$. Alors :

$$|\langle T, \varphi\rangle| = \left| \int_{B(M_0,\delta)\cap\mathbb{R}} \varphi(x, h(x))\, dx \right| \geqslant \int_{B(M_0, \delta/2)\cap\mathbb{R}} \underbrace{\varphi(x, h(x))}_{=1}\, dx$$
$$\geqslant Leb(V) > 0$$

où $V = \{x \in \mathbb{R} \mid (x, h(x)) \in B(M_0, \delta/2)\}$ est de mesure de Lebesgue strictement positive. Donc T est non nulle au voisinage de M_0, donc $M_0 \in \operatorname{supp} T$.

Ainsi $D \subset \operatorname{supp} T$ et $D = \operatorname{supp} T$.

②

3. Si T est la distribution T_f associée à une fonction continue sur $\mathbb{R}^2$ f, alors $\operatorname{supp} T = \operatorname{supp} f$ où $\operatorname{supp} f$ est le support de f au sens des fonctions continues. Alors, f serait nulle en dehors de D qui est de mesure nulle dans $\mathbb{R}^2$, donc T_f serait nulle. Or T est non nulle.

4. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. Soit $\phi(x) = \varphi(x, h(x))$, $\forall x \in \mathbb{R}$.

Alors : $\forall x \in \mathbb{R}$, $\phi'(x) = \dfrac{\partial \varphi}{\partial x}(x, h(x)) + h'(x)\dfrac{\partial \varphi}{\partial y}(x, h(x))$

D'où : $\langle \partial_x T + h'(x)\partial_y T, \varphi \rangle = - \int_{\mathbb{R}} (\partial_x \varphi + h'(x)\partial_y \varphi)(x, h(x))\,dx = -\int_{\mathbb{R}} \phi'(x)\,dx$

$= [\phi(x)]_{-\infty}^{+\infty} = 0$ car ϕ est à support compact.

Donc : $(\partial_x + h'(x)\partial_y) T = 0$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.

Exercice 2 - Equation de Laplace

1. Pour $d=1$ et $x \in \mathbb{R}$, on écrit $E(x) = x_+ = x H(x)$.

Alors $(x H(x))' = H(x) + \underbrace{x\delta_0}_{=0}$ et $(x H(x))'' = H'(x) = \delta_0$.

Donc $E'' = \delta_0$.

2. On suppose $d \geq 2$. Soit $j \in \{1, \dots, d\}$. On a, pour tout $x \in \mathbb{R}^d \setminus \{0\}$,

$$\partial_j F(x) = \partial_j(|x|)\, f'(|x|) = \frac{x_j}{|x|} f'(|x|).$$

et
$$\partial^2_{jj} F(x) = \frac{x_j}{|x|} \times \partial_j(|x|) f''(|x|) + \partial_j\left(\frac{x_j}{|x|}\right) f'(|x|)$$
$$= \frac{x_j^2}{|x|^2} f''(|x|) + \left(\frac{1}{|x|} - \frac{x_j^2}{|x|^3}\right) f'(|x|)$$

D'où :
$$\Delta F(x) = \sum_{j=1}^d \partial^2_{jj} F(x) = \frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{|x|^2} f''(|x|) + \left(\sum_{j=1}^d \frac{1}{|x|}\right) f'(|x|) - \frac{\sum_{j=1}^d x_j^2}{|x|^3} f'(|x|)$$
$$= \frac{|x|^2}{|x|^2} f''(|x|) + \frac{d}{|x|} f'(|x|) - \frac{|x|^2}{|x|^3} f'(|x|)$$
$$= f''(|x|) + \frac{d-1}{|x|} f'(|x|).$$

3. On résout, sur $\mathbb{R}_+^*$, l'équation différentielle linéaire : $f''(r) + \dfrac{d-1}{r} f'(r) = 0$.

③ Si $d=2$, on obtient $f(r) = a + b\log r$, $a,b \in \mathbb{R}$.

Si $d \geq 3$, on obtient $f(r) = a + \frac{b}{r^{d-2}}$, $a,b \in \mathbb{R}$.

4. Pour F comme dans l'énoncé et $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \Delta F, \varphi \rangle = \langle F, \Delta\varphi \rangle = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx.$$

On fixe $\varepsilon > 0$. Par la formule de Green, on a :

normale sortante : $\vec{N} = -\frac{x}{|x|}$

$$\int_{\Omega_\varepsilon} (\Delta F)(x)\varphi(x) - F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \int_{\partial\Omega_\varepsilon} \vec{N}\cdot\Big(\underset{\nabla F(x)}{\frac{\partial F}{\partial n}}(x)\varphi(x) - \underset{\nabla\varphi(x)}{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}(x)F(x)\Big)d\sigma(x)$$

D'où :
$$\int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \cancel{\int_{|x|>\varepsilon} (\Delta F)(x)\varphi(x)\,dx}_{=0 \text{ par } 3.} + \int_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|}\cdot\Big(\underset{\nabla F(x)}{\frac{\partial F}{\partial n}}(x)\varphi(x) - \underset{\nabla\varphi(x)}{\frac{\partial \varphi}{\partial n}}(x)F(x)\Big)d\sigma(x)$$

• On a aussi :
$$\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{x}{|x|}\cdot F(x)\underset{\nabla\varphi(x)}{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\omega\in S^{d-1}} F(\varepsilon\omega)\big(-\nabla\varphi(\varepsilon\omega)\cdot\underset{x/|x|}{\underset{\uparrow}{\omega}}\big)\varepsilon^{d-1}\,d\omega$$

Or : $F(\varepsilon\omega) = \begin{cases} \log\varepsilon & \text{si } d=2 \\ \frac{1}{\varepsilon^{d-2}} & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$

Donc $\displaystyle\int_{|x|=\varepsilon} -\frac{x}{|x|}\cdot F(x)\underset{\nabla\varphi(x)}{\frac{\partial\varphi}{\partial n}}(x)\,d\sigma(x) \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ car $\varepsilon\log\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$ et $\varepsilon \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0$.

• On a encore :
$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|}\varphi(x)\underset{\nabla F(x)}{\frac{\partial F}{\partial n}}(x)\,d\sigma(x) = \int_{\omega\in S^{d-1}} \varphi(\varepsilon\omega)\underbrace{\nabla F(\varepsilon\omega)\cdot\omega}_{\frac{\partial f}{\partial n}(\varepsilon)}\varepsilon^{d-1}\,d\omega$$

avec $f(r) = \begin{cases} \log r & \text{si } d=2 \\ \frac{1}{r^{d-2}} & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$

Donc : si $d=2$:
$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|}\varphi(x)\underset{\nabla\varphi(x)}{\frac{\partial F}{\partial n}}(x)\,d\sigma(x) = \varepsilon\int_{\omega\in S^1} \varphi(\varepsilon\omega)\frac{1}{\varepsilon}\,d\omega \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0)\int_{\omega\in S^1} d\omega = 2\pi\varphi(0).$$

et si $d\geq 3$,
$$\int_{|x|=\varepsilon} \frac{x}{|x|}\cdot\varphi(x)\underset{\nabla F(x)}{\frac{\partial F}{\partial n}}(x)\,d\sigma(x) = \cancel{\varepsilon^{d-1}}\int_{\omega\in S^{d-1}} \varphi(\varepsilon\omega)\Big(-\frac{d-2}{\cancel{\varepsilon^{d-1}}}\Big)d\omega \xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} \varphi(0)\times(-(d-2))\times\sigma(S^{d-1}).$$

Donc :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_{|x|>\varepsilon} F(x)(\Delta\varphi)(x)\,dx = \begin{cases} 2\pi\varphi(0) & \text{si } d=2 \\ -(d-2)\sigma(S^{d-1})\,\varphi(0) & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$$

Donc : $$\langle \Delta F, \varphi\rangle = \begin{cases} 2\pi \langle \delta_0, \varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ -(d-2)\sigma(S^{d-1})\langle \delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$$

5. On a ; pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$,

$$\langle \Delta E, \varphi\rangle = \begin{cases} \frac{1}{2\pi}\langle \Delta F,\varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ \frac{1}{-(d-2)\sigma(S^{d-1})}\langle \Delta F,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3 \end{cases} = \begin{cases} \langle \delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d=2 \\ \langle \delta_0,\varphi\rangle & \text{si } d\geq 3 \end{cases}$$

Donc $\Delta E = \delta_0$.

6. a. Si $p \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$ est à support compact, $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} p\}$ est convolutive et pour $d=3$, $-\Delta(E*(-p)) = -(\Delta E)*(-p) = (-\delta_0)*(-p) = p$.

Donc $V = E*(-p)$ est solution de $-\Delta V = p$ et elle tend vers 0 à l'infini car pour $d=3$, $E = -\frac{1}{4\pi|x|}$.

Si V_1 et V_2 sont deux solutions de $-\Delta V = p$ qui tendent vers 0 à l'infini, alors $\Delta(V_1 - V_2) = 0$ et par le théorème de Liouville, $V_1 - V_2 = 0$. Donc $V_1 = V_2$ et $E*(-p)$ est l'unique solution de $-\Delta V = p$ qui tende vers 0 à l'infini.

b. • Pour une charge unique à l'origine : $p = \delta_0$. Alors :

$$V = E*(-p) = E*(-\delta_0) = -E \quad \text{i.e. } V(x) = \frac{1}{4\pi|x|}.$$

• Pour un dipôle : $p = \delta'_{x_0}$, $x_0 \neq 0$. Alors :

$$V = E*(-p) = E*(-\delta'_{x_0}) = -(E*\delta_{x_0})' \cdots = (-E)'*\delta_{x_0}.$$

Donc : $$V(x) = \frac{1}{4\pi|x|} * \delta'_{x_0} = \left(\frac{1}{4\pi|x|}\right)' * \delta_{x_0} = \tau_{x_0}\left(\frac{x}{4\pi|x|^3}\right) = \frac{x - x_0}{4\pi|x-x_0|^3}$$

5

Exercice 3 - Equation de la chaleur

1. On a, $\forall (x,t) \in \mathbb{R}^2$, $0 \leq E(x,t) \leq \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} \in L^1_{loc}(\mathbb{R})$.

Donc $E \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$ et E définit une distribution sur $\mathbb{R}^2$.

2. Soient $t>0$ et $x \in \mathbb{R}$:

On a :
$$\partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\frac{1}{2}\frac{1}{\sqrt{4\pi}}\frac{1}{t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\frac{x^2}{4t^2} e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\, t^{5/2}}\right] e^{-\frac{x^2}{4t}}$$

et
$$\partial^2_{xx}\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = \partial_x\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}}\left(-\frac{2x}{4t}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}}\right) = -\partial_x\left(\frac{x}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$
$$= -\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} e^{-\frac{x^2}{4t}} - \frac{x}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}}\left(-\frac{x}{2t}\right) e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \left[-\frac{1}{4\sqrt{\pi}\, t^{3/2}} + \frac{x^2}{8\sqrt{\pi}\, t^{5/2}}\right] e^{-\frac{x^2}{4t}}$$
$$= \partial_t\left(\frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}\right)$$

3. a. Soit $\varepsilon>0$. Soit $\varphi \in C^\infty_0(\mathbb{R}^2)$.

On a :
$$I_\varepsilon = -\int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial_t \varphi(x,t)\, dt\, dx$$

IPP $\rightarrow$ $$= -\int_{\mathbb{R}} -\frac{1}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \partial_t\left(\frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\, dt\, dx$$

par 2. $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \partial^2_{xx}\left(\frac{e^{-x^2/4t}}{\sqrt{4\pi t}}\right)\varphi(x,t)\, dt\, dx$$

$2\times$ IPP + Fubini $\rightarrow$ $$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx + \int_{\mathbb{R}}\int_\varepsilon^{+\infty} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \partial^2_{xx}\varphi(x,t)\, dt\, dx$$
$$= \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx - J_\varepsilon.$$

Donc : $$I_\varepsilon + J_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{x^2}{4\varepsilon}}}{\sqrt{4\pi\varepsilon}} \varphi(x,\varepsilon)\, dx.$$

b. On pose $y = \frac{x}{\sqrt{\varepsilon}}$, $dx = \sqrt{\varepsilon}\, dy$.

Alors : $I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)\, dy$

Or, par convergence dominée, comme $e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon) \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} e^{-y^2/4} \varphi(0,0)$,

et $|e^{-y^2/4} \varphi(\sqrt{\varepsilon} y, \varepsilon)| \leq \|\varphi\|_\infty e^{-y^2/4} \in L^1(\mathbb{R})$, on a :

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon + J_\varepsilon = \frac{\varphi(0,0)}{\sqrt{4\pi}} \int_{\mathbb{R}} e^{-y^2/4}\, dy = \varphi(0,0).$$

4. On a, pour $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$:

$$\langle (\partial_t - \partial_{xx}^2) E, \varphi \rangle = -\langle E, \partial_t \varphi + \partial_{xx}^2 \varphi \rangle$$

$$= - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \left(\partial_t \varphi(x,t) + \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\right) dx\, dt$$

$$= - \int_{\mathbb{R} \times]0,+\infty[} \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}} \left(\partial_t \varphi(x,t) + \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\right) dx\, dt$$

$$= \lim_{\varepsilon \to 0} (I_\varepsilon + J_\varepsilon) = \varphi(0,0) = \langle \delta_0, \varphi \rangle.$$

par convergence dominée. En effet :

$$\left| \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \right| \leq \frac{\partial_t \varphi(x,t)}{\sqrt{4\pi t}} H(t) \in L^1(\mathbb{R} \times \mathbb{R}_+)$$

et quand $\varepsilon \to 0$, $\mathbb{1}_{[\varepsilon, +\infty[}(t) \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t) \longrightarrow \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t)$

et donc $I_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_t \varphi(x,t)\, dx\, dt$.

De même : $J_\varepsilon \underset{\varepsilon \to 0}{\longrightarrow} - \int_{\mathbb{R}^2} \frac{H(t)}{\sqrt{4\pi t}} e^{-\frac{x^2}{4t}} \partial_{xx}^2 \varphi(x,t)\, dx\, dt$.

Donc, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$, $\boxed{(\partial_t - \partial_{xx}^2) E = \delta_0}$

5. Comme $\{\operatorname{supp} E, \operatorname{supp} f\}$ est convolutive, $E * f$ converge.

6. Comme $E \in C^\infty(\mathbb{R}^2 \setminus \{0\})$, si $f \in C_0^\infty(\Omega)$ alors $u \in C^\infty(\Omega)$ avec $u = E * f$.

Exercice 4 - Equation de Cauchy-Riemann.

1. On a : $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{0\}$, $|f(x,y)| = \frac{1}{|x+iy|} \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^2)$.

car dans $\mathbb{R}^n$, $\frac{1}{\|x\|^\alpha}$ est intégrable en 0 si $\alpha < n$ (se voit en passant en coordonnées polaires).

2. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$. On a :

$$\langle \bar\partial f, \varphi \rangle = \frac{1}{2}\langle \partial_x f, \varphi\rangle + \frac{i}{2}\langle \partial_y f, \varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\langle f, \partial_x \varphi\rangle - \frac{i}{2}\langle f, \partial_y \varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\langle f, \partial_x\varphi + i\partial_y\varphi\rangle$$
$$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2} \frac{1}{x+iy}(\partial_x\varphi + i\partial_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy$$

$\times \frac{x-iy}{x-iy}$ dans $\int$ $\rightarrow$ $$= -\frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)(x,y)\,dx\,dy - \frac{1}{2}i\int_{\mathbb{R}^2}\frac{1}{x^2+y^2}(x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi)\,dx\,dy$$

en posant $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$ $\rightarrow$ $$= -\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r^2}\, r\partial_r\tilde\varphi(r,\theta) \times r\,dr\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_0^{2\pi}\int_{\mathbb{R}^+}\frac{1}{r^2}\left(\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta)\right) r\,dr\,d\theta$$

et $\tilde\varphi(r,\theta) = \varphi(r\cos\theta, r\sin\theta)$

car $\partial_r\tilde\varphi(r,\theta) = \partial_r\,\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = \cos\theta\,\partial_x\varphi + \sin\theta\,\partial_y\varphi$
$$= \frac{1}{r}(x\partial_x\varphi + y\partial_y\varphi)$$

et $\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta) = \partial_\theta\,\varphi(r\cos\theta, r\sin\theta) = -r\sin\theta\,\partial_x\varphi + r\cos\theta\,\partial_y\varphi$
$$= x\partial_y\varphi - y\partial_x\varphi$$

Soit $\varepsilon > 0$: $$\langle\bar\partial f, \varphi\rangle = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[-\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\int_\varepsilon^{+\infty}\partial_r\tilde\varphi(r,\theta)\,dr\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{r}\int_0^{2\pi}\partial_\theta\tilde\varphi(r,\theta)\,d\theta\,dr\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta - \frac{1}{2}i\int_\varepsilon^{+\infty}\frac{1}{r}\underbrace{\left(\tilde\varphi(r,2\pi) - \tilde\varphi(r,0)\right)}_{0}dr\right]$$

$$= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)\,d\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}\varphi(0,0)\,d\theta = \pi\varphi(0,0).$$

par convergence dominée car $|\tilde\varphi(\varepsilon,\theta)| \le M$ est intégrable sur $[0,2\pi]$ et $\tilde\varphi(\varepsilon,\theta) \underset{\varepsilon\to 0}{\to} \varphi(0,0)$.

D'où $\langle\bar\partial f, \varphi\rangle = \pi\varphi(0,0) = \langle \pi\delta_0, \varphi\rangle$ i.e. $\bar\partial f = \pi\delta_0$.