Institut Galilée **2010-2011**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale I

Devoir maison 1 : Distributions

Ce devoir est à rendre pour le 03/03/2011. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction des démonstrations.

Exercice 1

Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$.

1. Montrer que les limites

$$\lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Re}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right) \text{ et } \lim_{\varepsilon \to 0^+} \mathrm{Im}\left(\int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x\right)$$

existent.

2. En déduire que l'expression

$$< T, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \int_{\mathbb{R}} \frac{\varphi(x)}{x - \mathrm{i}\varepsilon}\,\mathrm{d}x$$

définit une distribution T dont on identifiera la partie réelle et la partie imaginaire. Donner l'ordre de T.

Exercice 2

1. Montrer que l'intégrale double

$$\iint_{|x|>1, |y|<1} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

est absolument convergente. On note A sa valeur.

2.a. Montrer que, si $\theta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ et si $\varepsilon > 0$, l'intégrale

$$I_\varepsilon = \iint_{\mathbb{R}^2} \left(\mathbf{1}_{|x|>\varepsilon} - \mathbf{1}_{|y|>\varepsilon}\right) \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\theta(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

converge lorsque ε tend vers 0 et que

$$\lim_{\varepsilon \to 0} I_\varepsilon = 2A\theta(0, 0).$$

Indication : Dessiner le support de la fonction $(x, y) \mapsto \mathbf{1}_{|x|>\varepsilon} - \mathbf{1}_{|y|>\varepsilon}$.

b. On suppose de plus que $\theta(y, x) = \theta(x, y)$, pour tout $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Montrer que l'intégrale

$$J_\varepsilon = \iint_{|x|>\varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\theta(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y$$

converge lorsque ε tend vers 0. Déterminer cette limite.

3. Montrer que, si $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$, on a l'inégalité

$$\forall (x, y) \in \mathbb{R}^2,\ |\varphi(x, y) - \varphi(0, 0)| \le |x| \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial x}(z)\right| + |y| \sup_{z \in \mathbb{R}^2} \left|\frac{\partial \varphi}{\partial y}(z)\right|.$$

Indication : Intégrer $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\varphi(tx, ty)$.

4. Montrer que la forme linéaire T sur $C_0^\infty(\mathbb{R}^2)$ définie par

$$\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^2),\ < T, \varphi >= \lim_{\varepsilon \to 0^+} \iint_{|x|>\varepsilon} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2}\varphi(x, y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y,$$

est une distribution d'ordre inférieur ou égal à 1.