Institut Galilée **2010-2011**
Filière MACS2
Mathématiques, Théorie Générale I

Devoir maison 2 : Équations différentielles et équations aux dérivées partielles.

Ce devoir est à rendre pour le 21/03/2011. Le plus grand soin sera apporté à la rédaction des démonstrations.

Exercice 1

1. Résoudre, dans l'ensemble des fonctions localement intégrables sur $\mathbb{R}$, l'équation différentielle : $2xu' - u = 0$.
2. Soit $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ une solution de l'équation $2xT' - T = 0$. Soit T_1 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_+^*)$ et soit T_2 sa restriction à $\mathcal{D}'(\mathbb{R}_-^*)$.
a. Calculer T_1 et T_2.
b. Soit $S = T - T_1 - T_2$. Vérifier que le support de S est inclus dans $\{0\}$.
c. Soit $R = \sum_{k=0}^{p} a_k \delta^{(k)} \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ où les a_k sont dans $\mathbb{C}$. Montrer que : $2xR' - R = 0 \iff R = 0$.
d. En déduire les solutions dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation $2xT' - T = 0$.
2. Résoudre, dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$, l'équation différentielle :

$$2xT' - T = \delta_0.$$

3. En déduire une solution $T \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ de l'équation différentielle $2xT' - T = f$, où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R})$ est à support compact.

Exercice 2

Soit $N \in \mathbb{N}$. On pose :

$$F_N \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \to & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & \frac{1}{2\pi}\sum_{k=-N}^{N} e^{ikt} \end{array}.$$

La fonction $F_N \in L^1_{\text{loc}}(\mathbb{R})$. On note T_N la distribution associée à F_N.
1. Montrer que, pour tout $t \in \mathbb{R} \setminus 2\pi\mathbb{Z}$,

$$F_N(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}.$$

2. Soit $M \in \mathbb{N}$. Soit $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R})$ dont le support est inclus dans $[-(2M+1)\pi, (2M+1)\pi]$. Montrer que :

$$< T_N, \varphi >= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin(\frac{(2N+1)t}{2})}{\sin\frac{t}{2}}\phi(t)\, \mathrm{d}t,$$

où, pour tout $t \in \mathbb{R}$, $\phi(t) = \sum_{k=-M}^{M} \varphi(t + 2k\pi)$.
3. En écrivant $\phi(t) = \phi(0) + t\psi(t)$ où ψ est de classe C^∞, montrer que la suite $(T_N)_{N\in\mathbb{N}}$ converge dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R})$ vers la distribution $\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta_{2\pi n}$.

Exercice 3

On considère la distribution de $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ donnée par la fonction intégrable :

$$\forall (t,x) \in \mathbb{R}^2,\ E(x,t) = \left\{ \begin{array}{ccc} \frac{1}{2} & \text{si} & t - |x| > 0 \\ 0 & \text{si} & t - |x| \leq 0 \end{array} \right. .$$

1. Calculer $(\partial^2_{tt} - \partial^2_{xx})E$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$.
2. En déduire une solution $u \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ de l'équation aux dérivées partielles :

$$\partial^2_{tt}u - \partial^2_{xx}u = f,$$

où $f \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^2)$ est à support compact.
3. Si $f \in C_0^\infty(\Omega)$, Ω ouvert de $\mathbb{R}^2$, que peut-on dire de u ?