U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2012-2013

Feuille d'exercices 1
Suites réelles et fonctions de la variable réelle

Exercice 1
Montrer que la suite de terme général $u_n = \frac{n+1}{2n+1}$ converge vers une limite ℓ. Trouver $N(\varepsilon)$ tel que $|u_n - \ell| < \varepsilon$ pour $n > N(\varepsilon)$, avec $\varepsilon = 10^{-3}$.

Exercice 2
Montrer que la suite de terme général $v_n = \frac{n^2}{n+1}$ diverge et qu'elle tend vers l'infini. Trouver $N = N(\varepsilon)$ minimum tel que $v_n > 10^2$ pour $n > N$.

Exercice 3
Étudier la convergence des suites de terme général :

a. $\text{Arctan}\left(n + \frac{1}{n}\right)$	b. $\sqrt{n+1} - \sqrt{n}$	c. $\frac{n^{\frac{2}{3}}(n-1)^2}{(n+1)^2}$
d. $\frac{\sin n}{n}$	e. $\frac{1+(-1)^n}{n}$	f. $(-1)^n \frac{(n-1)^2}{(n+1)^2}$

Exercice 4
Soit x un réel.
a. Déterminer la limite de $u_n = \frac{E(x)+E(2x)+\ldots+E(nx)}{n^2}$.
b. En déduire que $\mathbb{Q}$ est dense dans $\mathbb{R}$.

Exercice 5
a. Soit un polynôme de la forme $P(x) = a_{2p+1}x^{2p+1} + a_{2p}x^{2p} + \cdots + a_0$ avec $a_{2p+1} > 0$. Trouver $\lim_{x\to\pm\infty} P(x)$ puis $\lim_{x\to\pm\infty} e^{P(x)} + P(x)$. En déduire que $e^{P(x)} + P(x) = 0$ admet au moins une solution réelle.

b. Soit $f : [0,1] \to [0,1]$ une fonction continue. On se propose de montrer que f admet au moins un point fixe, c'est-à-dire qu'il existe α dans $[0,1]$ tel que $f(\alpha) = \alpha$. Faire un graphique illustrant la situation. On considérera la fonction $g(x) = f(x) - x$, le signe de $g(0)$ et de $g(1)$ et on utilisera le théorème des valeurs intermédiaires.

c. Soit f une application continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\lim_{x\to\infty} f(x) = \ell < \infty$. Illustrer cette situation par un graphique. On se propose de montrer que f est bornée. Autrement dit de vérifier que l'ensemble $\{y \in \mathbb{R} \mid \exists x,\ y = f(x)\}$ est borné. Montrer qu'il existe $X > 0$ et $\varepsilon > 0$ tels que $\ell - \varepsilon \le f(x) \le \ell + \varepsilon$ pour tout $x \ge X$. Prouver le résultat en considérant les intervalles $[0, X]$ et $[X, +\infty]$.

Exercice 6
a. Préciser le domaine de définition et la dérivée de la fonction $x \mapsto \frac{1}{\cos\sqrt{x}}$.
b. Calculer $(x^2\, e^x)^{(n)}$ $(n \in \mathbb{N})$, à l'aide de la formule de Leibniz.
c. En utilisant une récurrence, montrer que la dérivée $n^{\text{ième}}$ de la fonction $x \mapsto x^{n-1}e^{\frac{1}{x}}$ est égale à la fonction $x \mapsto (-1)^n \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^{n+1}}$.

Exercice 7
Étudier la dérivabilité des fonctions suivantes aux points x_0 considérés (on les prolongera au préalable par continuité si besoin est) :

$$f(x) = |x|x, x_0 = 0; \quad g(x) = x^2 \sin\frac{1}{x}, x_0 = 0;$$
$$h(x) = x \sin\frac{1}{x}, x_0 = 0; \quad k(x) = x\log x, x_0 = 0$$

Exercice 8
a. Calculer $\lim_{x\to 0} \frac{2^{\sin x} - 2^{\sinh x}}{\sin x - \sinh x}$ en utilisant le théorème des accroissements finis.
b. Plus généralement, soient f et g deux fonctions continues en $x_0 \in \mathbb{R}$ avec $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} g(x) = a$. On suppose de plus que $f(x) \neq g(x)$ pour $x \neq x_0$. Calculer $\lim_{x\to x_0} \frac{2^{f(x)} - 2^{g(x)}}{f(x) - g(x)}$.

Exercice 9
a. Montrer que $\frac{1}{x+1} < \ln(x+1) - \ln x < \frac{1}{x},\ \forall x \in \mathbb{R}_+^*$.
b. En déduire que $\ln(n+1) < 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} < 1 + \ln n,\ \forall n \in \mathbb{N}, n \ge 1$.
c. Posons $u_n = 1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \ln n$. Montrer que la suite (u_n) est décroissante (au moins à partir d'un certain rang) et qu'elle est convergente.

Exercice 10
Soit $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ la suite réelle définie par récurrence en posant $u_0 = 1$ et $u_{n+1} = \sqrt{1+u_n}$ si $n \in \mathbb{N}^*$.
a. Montrer que (u_n) est croissante et majorée.
b. Montrer que (u_n) converge vers le nombre réel positif l qui vérifie $l^2 - l - 1 = 0$ et calculer l.