U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2012-2013

Feuille d'exercices 2
Formules de Taylor et développements limités

I. Formules de Taylor

Exercice 1

La fonction f vérifiant les conditions de Taylor-Lagrange sur un intervalle contenant a, trouver la limite lorsque h tend vers 0 de $\frac{f(a+h)+f(a-h)-2f(a)}{h^2}$.

Exercice 2

a. Écrire la formule de Taylor avec reste intégral à l'ordre $n \geq 1$ pour la fonction $x \mapsto \ln(1+x)$.

b. En déduire que :

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{n-1}}{n} = \ln(2).$$

Exercice 3

Soit $f \; : \; \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction de classe C^2. On suppose que, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $|f(x)| \leq M_0$ et $|f''(x)| \leq M_2$.

a. Montrer que : $\forall\, h > 0,\ \forall\, x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq \frac{2M_0}{h} + \frac{hM_2}{2}$.

b. En déduire que : $\forall x \in \mathbb{R},\ |f'(x)| \leq 2\sqrt{M_0 M_2}$.

II. Développements limités

Exercice 4

Soit $f \; : \;]-1, +\infty[\to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = \sqrt{1+x}$.
a. Écrire le développement limité d'ordre 2 en 0 de f.
b. On cherche à donner une valeur approchée de $\sqrt{101}$ sans utiliser de calculatrice. Un étudiant se propose de poser $x = 100$ dans la formule obtenue à la question a. Que peut-on en dire ?
c. Proposer une méthode plus efficace en utilisant la même formule.

Exercice 5

Déterminer le développement limité au voisinage de 0 :

a. à l'ordre 3 de $x \mapsto \mathrm{e}^{-x}$,

b. à l'ordre 4 de $x \mapsto 2\cos(x) - 1$,

c. à l'ordre 5 de $x \mapsto 2\sin(x) - \sin(2x)$,

d. à l'ordre 3 de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x}{1+x}$,

e. à l'ordre 3 de $x \mapsto (x - x^3)\sqrt{1+x}$,

f. à l'ordre 4 de $x \mapsto \mathrm{e}^{\sin(x)}$,

g. à l'ordre 5 de $x \mapsto \frac{\mathrm{e}^x \mathrm{sh}(x)}{\mathrm{ch}(x)}$,

h. à l'ordre 4 de $x \mapsto (\ln(1+x))^2$,

i. à l'ordre 3 de $x \mapsto \ln(\cos(x))$.

Exercice 6

a. Déterminer le développement limité au voisinage de 1 à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto x^{-2}\ln(x)$.

b. Déterminer le développement limité au voisinage de $\frac{\pi}{3}$ à l'ordre 3 de la fonction $x \mapsto \ln(\sin(x))$.

Exercice 7

Soit g la fonction $x \mapsto \dfrac{\arctan x}{(\sin x)^3} - \dfrac{1}{x^2}$.

a. Donner le domaine de définition de g.
b. Montrer que g se prolonge par continuité en 0 en une fonction dérivable.
c. Déterminer la tangente en 0 au graphe de cette fonction et la position de ce graphe par rapport à celle-ci.

Exercice 8

a. Trouver un développement limité à l'ordre n au voisinage de l'origine de :

(i) $\tan x \quad (n = 5)$ (ii) $\sqrt{1+\sqrt{1+x}} \quad (n = 2)$
(iii) $e^{\frac{1}{x}\ln(1+x)} \quad (n = 3)$.

b. En utilisant un développement limité, calculer les limites suivantes :

(i) $\lim_{x\to 1} \frac{1+\cos \pi x}{x^2-2x+1}$; (ii) $\lim_{x\to 0} \frac{\arctan x - x}{\tan x - \arcsin x}$

(iii) $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} - \frac{1}{\sin^2 x}$; (iv) $\lim_{x\to\infty} \left(\frac{2^{\frac{1}{x}} + 3^{\frac{1}{x}}}{2}\right)^x$.

Exercice 9

a. Donner le développement limité au voisinage de 0 et à l'ordre 4 des fonctions $\ln(\cos x)$ et $\sin^2 x$.
b. En déduire la limite de la suite $u_n = n^4 \ln\left(\cos\frac{1}{n}\right) + \frac{n^4}{2}\sin^2 \frac{1}{n}$.