U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2012-2013

Feuille d'exercices 3
Séries numériques et séries entières

I. Séries numériques

Exercice 1
Les séries suivantes peuvent-elles être convergentes ?

$$\text{a. } \sum \frac{p^2-p+1}{p^2+p+2} \qquad \text{b. } \sum \cos\frac{1}{p} \qquad \text{c. } \sum \frac{1}{n^{\frac{1}{n}}}$$

Exercice 2
Expliciter les sommes partielles S_n des séries suivantes, en déduire la nature de leur convergence et leur somme éventuelle :

$$\text{a. } \sum \frac{1}{p(p+1)} \qquad \text{b. } \sum (-1)^p \qquad \text{c. } \sum \ln\left(1+\frac{1}{p}\right)$$

La condition $u_p \to 0$ est-elle suffisante pour qu'une série converge ?

Exercice 3
En utilisant le fait que la somme de deux séries convergentes est convergente, montrer que la somme d'une série convergente et d'une série divergente est nécessairement divergente.

Exercice 4
Donner les sommes partielles $S_n(x)$ et la somme $S(x)$ si elle existe de la série géométrique de terme général $u_k = x^k$, pour $x = \frac{1}{2}$, $x = \frac{1}{3}$ et $x = 2$.

Exercice 5
Utiliser le théorème de comparaison pour étudier la nature des séries de terme général :

a. $\sin^2 \frac{x}{n}$, $x \in \mathbb{R}$ b. $\sin\left(\frac{2}{3}\right)^n$
c. $\sqrt{\frac{\ln n}{n}}$ d. $\frac{1}{\sqrt{n(2n-1)}}$.

Exercice 6
Donner la nature des séries de terme général :

a. $\frac{2n+1}{n^3-n+2}$ b. $\ln\left(1+\frac{1}{n^\alpha}\right)$, $\alpha > 0$
c. $\frac{1}{n(n-\ln n)}$ d. $\frac{\sqrt{n+1}-\sqrt{n}}{\sqrt{n}}$.

Exercice 7
Soit la série de terme général

$$u_n = \frac{1}{\left(1+(\frac{4}{5})^n\right)^{\frac{1}{2}} - 1 - \frac{1}{2}(\frac{4}{5})^n}.$$

Préciser sa nature.

Exercice 8
Donner la nature des séries ci-dessous ($a > 0$), en utilisant les critères de Cauchy ou de d'Alembert :

$$\text{a. } u_n = \frac{n!}{n^n} \quad \text{b. } u_n = \frac{n \ln n}{2^n} \quad \text{c. } u_n = \left(a - \frac{1}{n}\right)^n, \ a > 0.$$

Exercice 9
Étudier la convergence des séries ci-dessous, en précisant dans chaque cas s'il y a convergence absolue

a. $u_n = \frac{\sin n}{n^3}$ b. $u_n = (-1)^n \frac{\ln n}{n}$
c. $u_n = e^{\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}} - 1$ d. $u_n = \frac{(-1)^n n + 2}{n^2+1}$
e. $u_n = (-1)^n \tan\frac{1}{n}$ f. $u_n = \frac{1}{2^n}\sin n\theta$, $\theta \in \mathbb{R}$.

Exercice 10
Étudier, suivant la valeur du paramètre $\alpha > 0$, la convergence des séries numériques de terme général $u_n = \ln\left(1+\frac{(-1)^n}{n^\alpha}\right)$ $(n \geq 1)$.

Exercice 11
Soit la série $\sum \frac{(-1)^p}{p+(-1)^p}$. Le théorème des séries alternées lui est-il applicable ? L'étudier en groupant deux termes consécutifs.

II. Séries entières

Exercice 12
Soit $x \in \mathbb{R}$. On considère la série de terme général $v_n = nx^n$. Montrer qu'elle diverge pour $|x| \geq 1$. En utilisant une dérivation, calculer les sommes partielles $S_n(x)$. Montrer qu'on a convergence (resp. divergence) pour $|x| < 1$ (resp. pour $|x| \geq 1$) et donner la somme $S(x)$ lorsqu'elle existe.

Exercice 13
a. Donner un exemple de série entière de rayon de convergence π.
b. Est-il possible de trouver des suites $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ telles que $a_n = o(b_n)$ et pourtant $\sum a_n z^n$ et $\sum b_n z^n$ ont même rayon de convergence ?
c. Quel est le lien entre le rayon de convergence des séries entières $\sum a_n z^n$ et $\sum (-1)^n a_n z^n$? Que peut-on dire du domaine de convergence de ces deux séries entières ?

Exercice 14
Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

a. $\sum \frac{n!}{(2n)!} z^n$ b. $\sum \ln(n) z^n$
c. $\sum \frac{1}{\sqrt{n}} z^n$ d. $\sum n^{\ln(n)} z^n$

Exercice 15
Développer en série entière au voisinage de 0 les fonctions suivantes. On précisera le rayon de convergence de la série entière obtenue.

a. $x \mapsto \ln(1+2x^2)$ b. $x \mapsto \ln(a+x),\ a > 0$
c. $x \mapsto \frac{1}{a-x},\ a \neq 0$ d. $x \mapsto \frac{e^x}{1-x}$

Exercice 16
On considère l'équation différentielle $y'' + xy' + y = 1$. On cherche l'unique solution de cette équation vérifiant $y(0) = y'(0) = 0$.

a. Supposons qu'il existe une série entière $f(x) = \sum a_n x^n$, de rayon de convergence strictement positif, solution de l'équation. Quelle relation de récurrence doit vérifier la suite (a_n) ?
b. Calculer explicitement a_n pour chaque n. Quel est le rayon de convergence de la série entière obtenue ?
c. Exprimer la somme de cette série entière à l'aide des fonctions usuelles.

Exercice 17

Donner une solution développable en série entière de l'équation différentielle : $xy'' + y = 0$.

Exercice 18

Déterminer toutes les fonctions développables en série entière au voisinage de 0 qui sont solution de l'équation différentielle

$$x^2(1-x)y'' - x(1+x)y' + y = 0.$$