U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2012-2013

Feuille d'exercices 4
Intégration et équations différentielles

I. Calculs de primitives et d'intégrales

Exercice 1
Calculer les primitives suivantes :

$$\int \sin^3\theta\,\cos\theta\,d\theta\,;\quad \int \sqrt{1-x^2}\,dx\,;\quad \int x\sqrt{1+x^2}\,dx\,;$$
$$\int \frac{\tan x}{\cos^2 x}\,dx\,;\quad \int \frac{\sin 2u}{1+\cos^2 u}\,du\,;\quad \int \frac{\cos^2\frac{x}{2}}{x+\sin x}\,dx\,;$$
$$\int \frac{t\,dt}{\sqrt{t+1}}\,.$$

Exercice 2
Préciser les intervalles de définition des primitives qui suivent et les calculer au moyen d'un changement de variables. De même, calculer au moyen d'un changement de variables les intégrales définies qui suivent :

$$\int \frac{(\ln x)^\alpha}{x}\,dx \quad \text{et} \quad \int_1^e \frac{(\ln x)^\alpha}{x}dx \quad (\alpha\in\mathbb{R}_+)$$
$$\int \frac{dx}{x\,(ax^n+b)} \quad \left(b\neq 0,\ \text{avec } t=\frac{1}{x}\right)$$
$$\int \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad \text{et} \quad \int_{-1}^0 \sqrt{\frac{1+x}{1-x}}\,dx \quad (-1<x<1).$$

Exercice 3
Calculer les primitives

$$\int \sin^2\theta\,d\theta;\quad \int \cos^4\theta\,d\theta \quad \int \sin^3\theta\,d\theta.$$

Exercice 4
Soient f continue et positive sur $[0,1]$ et $I_n=\int_0^1 t^n f(t)\mathrm{d}t$. Montrer que pour tout n et p entiers, $I_{n+p}^2\leq I_{2n}I_{2p}$.

Exercice 5
Soient α et β fixés et soit

$$E=\{f\in\mathcal{C}^1([0,1],\mathbb{R})\ ,\ f(0)=\alpha \text{ et } f(1)=\beta\}.$$

a. Montrer que $\forall f\in E,\ (\beta-\alpha)^2\leq\int_0^1(f'(t))^2\mathrm{d}t$.
b. Montrer que : $\inf_{f\in E}\int_0^1(f'(t))^2\mathrm{d}t=(\beta-\alpha)^2$.

II. Intégrales généralisées

Exercice 6
En posant $s=\sqrt{t}$, montrer que l'intégrale généralisée

$$\int_0^1 \frac{\arccos t}{\sqrt{t}}\,dt$$

existe et la transformer en l'intégrale d'une fonction continue sur $[0,1]$.

Exercice 7
Étudier la nature des intégrales ($\alpha\in\mathbb{R}$) :

$$\int_0^1 \frac{dx}{(x+2)\,\sqrt[3]{x}}\,;\quad \int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{x}\,(1-x)}\,;\quad \int_0^\pi \frac{1-\cos x}{x^{5/2}}\,dx$$
$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{\ln\frac{1}{x}}}\,;\quad \int_0^\pi \frac{\sin x}{[x\,(\pi-x)]^{\frac{3}{2}}}\,dx\,;$$
$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos x}{\ln(1+x)}\left(\frac{x}{\frac{\pi}{2}-x}\right)^\alpha dx.$$

Exercice 8
Étudier la convergence éventuelle des intégrales suivantes ($\alpha\in\mathbb{R}$) :

$$\int_{-\infty}^0 \frac{x\,dx}{x^4+1}\ \text{(la calculer)}\,;\qquad \int_0^\infty e^{-x}\ln x\ dx\,;$$
$$\int_0^\infty \frac{x^2}{\sqrt{x^5+1}}\,dx\,;\qquad \int_0^\infty \frac{e^{-x}-1}{x^\alpha}\,dx.$$

Exercice 9
Montrer par récurrence qu'on a $\displaystyle\int_0^\infty x^n e^{-x}\,dx=n!$.

Exercice 10
a. Montrer que $\displaystyle\int_0^1 \ln x\,dx$ est convergente.
b. En déduire que les intégrales

$$I=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\sin x\,dx \quad J=\int_0^{\frac{\pi}{2}} \ln\cos x\,dx$$
$$K=\int_0^\pi \ln\sin x\,dx$$

ont un sens. Établir les relations :

$$\begin{cases} I = J = \frac{1}{2}K \\ I + J = \frac{1}{2}K - \frac{\pi}{2}\ln 2 \end{cases}$$

En déduire les valeurs de I, J et K.

Exercice 11
Démontrer que les intégrales $I = \displaystyle\int_0^1 \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ et $J = \displaystyle\int_1^\infty \frac{\ln x}{1+x^2}\,dx$ ont un sens et vérifier que $J = -I$.

Exercice 12
Montrer que $\displaystyle\int_1^\infty \frac{\cos x}{x^2}\,dx$ est absolument convergente. En déduire que $\displaystyle\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ converge.

III. Intégrales et séries

Exercice 13
Soit f est une fonction continue qui, pour $x > N$, est positive en décroissant vers 0. Soit la suite $u_p = f(p)$.
a. Montrer graphiquement les inégalités

$$\sum_{p=N+1}^{N+n} u_p \leq \int_N^{N+n} f(x)\,\mathrm{d}x \leq \sum_{p=N}^{N+n-1} u_p.$$

b. En déduire que $\sum u_n$ et $\int_N^\infty f(x)\,\mathrm{d}x$ sont alors de même nature.
Application : nature des séries $u_p = \frac{1}{p\ln^\beta p}$? (Séries de Bertrand).

Exercice 14
Soit la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} \frac{\sin x}{x}\,dx$ $(n \geq 0)$.
a. Montrer que (u_n) est convergente.
b. En utilisant le théorème de la moyenne, montrer que u_n n'est pas absolument convergente. En déduire que $\int_0^\infty \frac{\sin x}{x}\,dx$ n'est pas absolument convergente.

Exercice 15
Soit la série de terme général $u_n = \int_{n\pi}^{(n+1)\pi} e^{-x}\sin x\,dx$. Exprimer u_n en fonction de u_0. En déduire la somme

$$\sum_{p=0}^{\infty} u_p.$$

IV. Equations différentielles

Exercice 16 - Triplement d'une population
L'accroissement de la population P d'un pays est proportionnelle à cette population. La population double tous les 50 ans. En combien de temps triple-t-elle ?

Exercice 17
Résoudre les équations différentielles suivantes :
a. $y' + 2y = x^2 - 2x + 3$.
b. $y' + y = x\mathrm{e}^{-x}$.
c. $y' - 2y = \cos(x) + 2\sin(x)$.

Exercice 18
Résoudre les équations différentielles suivantes en utilisation la méthode de la variation de la constante :
a. $y' + y = \frac{1}{1+\mathrm{e}^x}$.
b. $(1+x)y' + y = 1 + \ln(1+x)$ sur $]-1+\infty[$.
c. $y' - \frac{1}{x}y = x\cos(x)$ sur $]0, +\infty[$.

Exercice 19
Résoudre les équations différentielles suivantes :
a. $y'' - 2y' + y = x$ avec $y(0) = y'(0) = 0$.
b. $y'' - 4y' + 3y = (2x+1)\mathrm{e}^{-x}$.
c. $y'' + 9y = x + 1$ avec $y(0) = 0$.

Exercice 20
Soit l'équation différentielle $xy'' + 2(x+1)y' + (x+2)y = 0$. En posant $z = xy$, résoudre cette équation différentielle sur $\mathbb{R}$.

Exercice 21
On étudie les équations d'Euler qui sont les équations différentielles de la forme :

$$t^2x'' + atx' + bx = g(t)$$

où a et b sont des réels et g une fonction continue de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$.
a. Pour $t > 0$, poser $t = e^u$ pour se ramener à une équation à coefficients constants.
b. Résoudre par cette méthode le problème de Cauchy : $t^2x'' + tx' + x = 0$ avec $x(1) = 0$ et $x'(1) = 2$.