U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2012-2013

Feuille d'exercices 5
Algèbre linéaire

Exercice 1
a. Montrer que la famille $(x \mapsto \cos(x), x \mapsto \cos(2x), x \mapsto \cos(3x))$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
b. Soient $r_1 < r_2 < r_3$ trois réels. Montrer que la famille $(x \mapsto e^{r_1 x}, x \mapsto e^{r_2 x}, x \mapsto e^{r_3 x})$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.
c. Soit $n \geq 1$. Montrer que la famille $(\cos^k)_{0 \leq k \leq n}$ est libre dans le $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathcal{F}(\mathbb{R}, \mathbb{R})$.

Exercice 2
Donner une base des $\mathbb{R}$-espaces vectoriels suivants :
a. $E = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid 2x - y + z = 0\}$.
b. $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x + y + z + t = 0\}$.
c. $G = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 \mid x - y + z = 0 \text{ et } x + y - 2z + t = 0\}$.

Exercice 3
Dans $\mathbb{R}^3$, on pose $u = (1, 1, 0)$, $v = (1, 0, 2)$ et $w = (0, 2, -3)$.
a. Montrer que $\mathcal{B} = (u, v, w)$ est une base du $\mathbb{R}$-espace vectoriel $\mathbb{R}^3$.
b. Donner les coordonnées des vecteurs $e_1 = (1, 0, 0)$, $e_2 = (0, 1, 0)$ et $e_3 = (0, 0, 1)$ dans la base $\mathcal{B}$.

Exercice 4
Soient $E = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y + z + t = 0\}$ et $F = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 / x + y = z + t\}$. Déterminer $\dim E, \dim F, \dim(E + F), \dim(E \cap F)$.

Exercice 5
Soit E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel de dimension finie et soient $u, v \in \mathcal{L}(E)$. On suppose que $E = \operatorname{Im} u + \operatorname{Im} v$ et $E = \operatorname{Ker} u + \operatorname{Ker} v$. Montrer alors que ces deux sommes sont nécessairement directes.

Exercice 6
Soit $n \geq 1$ un entier. On considère l'application

$$u \ : \ \begin{array}{ccc} \mathbb{C}_n[X] & \to & \mathbb{C}_n[X] \\ P & \mapsto & P - P' \end{array}.$$

a. Montrer que l'application u est linéaire.
b. Montrer que l'application u est injective.
c. En déduire que u est bijective.

Exercice 7
Calculer les déterminants $\begin{vmatrix} 0 & 0 & c \\ a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \end{vmatrix}$ et $\begin{vmatrix} 0 & 0 & 0 & d \\ 0 & b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & c & 0 \\ a & 0 & 0 & 0 \end{vmatrix}$.

Exercice 8
Sans aucun calcul, expliciter $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\Delta_2 = \alpha \Delta_1$, avec :

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix} \quad \text{et}$$

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_1 + 2a_2 + 3a_3 & b_1 + 2b_2 + 3b_3 & c_1 + 2c_2 + 3c_3 \end{vmatrix}.$$

Exercice 9
Calculer les déterminants 3×3 ci-dessous et préciser si les vecteurs-colonnes (resp. les vecteurs-lignes) forment une base :

$$\text{a. } \begin{vmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 2 & 1 & -1 \\ 4 & 0 & 3 \end{vmatrix} \qquad \text{b. } \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & 2 & -1 \\ 4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$$

$$\text{c. } \begin{vmatrix} a & b & c \\ b + c & a + c & b + a \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Exercice 10
Écrire sous la forme d'un produit de facteurs du premier degré en a, le déterminant

$$D = \begin{vmatrix} 1 & -1 & a + 1 & 2a \\ a + 2 & a & a + 2 & a^2 \\ 0 & a + 2 & 0 & a(a + 2) \\ 3 & 1 & 2a + 3 & 2a \end{vmatrix}.$$

Exercice 11
Montrer que le système linéaire

$$\left\{ \begin{array}{rcrcrcr} x & + & y & + & 2z & = & 3 \\ -x & + & 2y & - & z & = & -5 \\ 2x & + & y & + & z & = & 6 \end{array} \right.$$

admet une solution unique (x_0, y_0, z_0). Déterminer explicitement y_0 (on ne demande pas l'expression de x_0 et de z_0). On utilisera la formule de Cramer.