U.P.N - Sup Galilée
Formation Ingénieurs
Harmonisation Mathématiques

Année scolaire 2012-2013

Feuille d'exercices 6
Calcul matriciel, réduction et applications

Exercice 1
Calculer par des méthodes adaptées les inverses des matrices ci-dessous :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}, \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 3 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix},$$

$$C = \begin{pmatrix} 1 & a & 0 & 0 \\ 0 & 1 & a & 0 \\ 0 & 0 & 1 & a \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},\ a \in \mathbb{R}.$$

Exercice 2
Soit $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^2)$ tel que $f(e_1) = -e_2$ et $f(e_2) = e_1 - 2e_2$ où $\mathcal{C} = \{e_1, e_2\}$ désigne la base canonique de $\mathbb{R}^2$.
a. Expliciter $A = M_{\mathcal{C}}(f)$.
b. Soit $\mathcal{B}$ une autre base de $\mathbb{R}^2$ donnée par

$$\mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}.$$

Donner la matrice de passage P de $\mathcal{C}$ à $\mathcal{B}$. Calculer $B = M_{\mathcal{B}}(f)$, en utilisant la matrice de passage P.
c. Calculer B^2, B^3 puis B^n ($n \in \mathbb{N}$) par récurrence. En déduire A^n.
d. Expliciter

$$f^n(e_1),\ f^n(e_2),\ f\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},\ \text{ et } f^n\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix},$$

pour $n \in \mathbb{N}$ et $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.

Exercice 3
Soit E un espace vectoriel rapporté à la base $\mathcal{B} = \{e_1, e_2\}$ et soit f dans $\mathcal{L}(E)$ telle que $f(e_1) = -e_2$ et $f(e_2) = -e_1$.
a. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour $A = M_{\mathcal{B}}(f)$.
b. Diagonaliser A.

Exercice 4
Soient $f \in \mathcal{L}(\mathbb{R}^3)$ et $\mathcal{B}_c$ la base canonique de $\mathbb{R}^3$. Soit la matrice

$$A = M_{\mathcal{B}_c}(f) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

a. Trouver les valeurs propres et une base de vecteurs propres pour A.
b. Diagonaliser A. En déduire A^n pour $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 5
On considère la matrice $A = \begin{pmatrix} -1 & -2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$.
a. Calculer $A^2 - 3A + I$. En déduire que A est inversible et donner son inverse.
b. Pour $n \geq 3$, déterminer le reste de la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$.
c. En déduire l'expression de la matrice A^n.

Exercice 6
Soient (u_n) et (v_n) les suites réelles définies par récurrence par les formules

$$\begin{cases} u_0 = 2 \\ v_0 = -1 \end{cases} \text{ et } \begin{cases} u_{n+1} = 2u_n + 3v_n \\ v_{n+1} = u_n + 4v_n \end{cases}, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

a. Pour tout n entier, on pose

$$X_n = \begin{pmatrix} u_n \\ v_n \end{pmatrix}.$$

Déterminer une matrice A telle que $X_{n+1} = AX_n$.
b. En utilisant une récurrence, exprimer X_n en fonction de X_0 et de A.
c. Calculer A^n pour tout entier $n \geq 1$.
d. Donner une expression de u_n et de v_n en fonction de $n \in \mathbb{N}$.

Exercice 7
Soit la matrice $M \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$ définie par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ -3 & 2 & -2 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

a. Écrire M sous la forme $M = I_3 + N$ où $N \in \mathcal{M}_3(\mathbb{R})$.
b. Calculer N^2, N^3 puis N^n pour tout $n \geq 4$.
c. En déduire l'expression de M^n, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$.

d. On considère les suites réelles $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(y_n)_{n\in\mathbb{N}}$ et $(z_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définies par :

$$\begin{pmatrix} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ et } \forall n \in \mathbb{N}, \left\{ \begin{array}{lcl} x_{n+1} & = & y_n \\ y_{n+1} & = & -3x_n + 2y_n - 2z_n \\ z_{n+1} & = & x_n - y_n + z_n \end{array} \right.$$

En utilisant les questions précédentes, donner les expressions de x_n, y_n et z_n en fonction de l'entier n.

Exercice 8
On considère le système différentiel $Y' = AY$ où A est donnée par la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix}$$

a. Montrez que les fonctions

$$t \mapsto \exp(-2t) \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad t \mapsto \exp(3t) \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$$

sont solutions du système différentiel $U' = AU$.
b. En déduire une base des solutions du système différentiel. Déterminer la solution de ce système valant ${}^t(1, 1, 1)$ en $t = 0$.

Exercice 9
On considère la matrice :

$$A = \begin{bmatrix} -6 & 5 & 3 \\ -8 & 7 & 4 \\ -2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

a. Montrez que le polynôme caractéristique de A, que l'on note χ_A, vaut :

$$\chi_A(X) = -X^3 + 2X^2 - X.$$

b. Montrez que A n'est pas diagonalisable.
c. En admettant le théorème de Cayley-Hamilton, qui nous dit que $\chi_A(A) = 0$, montrez par récurrence sur n que :

$$\forall n \geq 1,\ A^n = (n-1)A^2 - (n-2)A.$$

d. Calculez l'exponentielle de la matrice tA où t est un réel quelconque. On rappelle que :

$$e^{tA} = \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{t^k A^k}{k!}.$$

e. Résoudre le problème de Cauchy :

$$\left\{ \begin{array}{lcl} X' & = & AX \\ X(0) & = & \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \end{array} \right.$$

On pourra montrer au préalable le résultat général suivant :
La solution du problème de Cauchy $\left\{ \begin{array}{lcl} y' & = & Ay \\ y(0) & = & y_0 \end{array} \right.$ *est donnée par* $y(t) = e^{tA} y_0$.

Exercice 10
On considère la matrice A définie par

$$A = \begin{pmatrix} 6 & -2 & 2 \\ -2 & 5 & 0 \\ 2 & 0 & 7 \end{pmatrix}.$$

a. Justifier sans aucun calcul que la matrice A est diagonalisable.
b. Soit $X = {}^t(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Montrer que ${}^tXAX > 0$.
c. Calculer les valeurs propres de A. En déduire que A est définie positive.
d. Diagonaliser A dans une base orthonormée de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 11
Pour chacune des fonctions suivantes, étudier la nature du point critique donné :
a. $f(x, y) = x^2 - xy + y^2$ au point critique $(0, 0)$.
b. $f(x, y) = x^2 + 2xy + y^2 + 6$ au point critique $(0, 0)$.
c. $f(x, y) = x^3 + 2xy^2 - y^4 + x^2 + 3xy + y^2 + 10$ au point critique $(0, 0)$.

Exercice 12
Trouver les points critiques de la fonction $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ définie par $f(x, y) = \sin x + y^2 - 2y + 1$ et déterminer si ce sont des minima locaux, des maxima locaux ou des points selle.

Exercice 13
Soit $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la fonction définie par $f(x, y) = \sqrt{4 - x^2 - y^2}$.
a. Etudier les extrema de f.
b. Vérifier les résultats obtenus en considérant la surface d'équation $z = f(x, y)$.